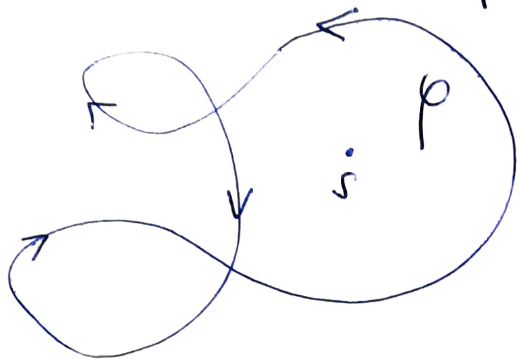
Výpočet indexu

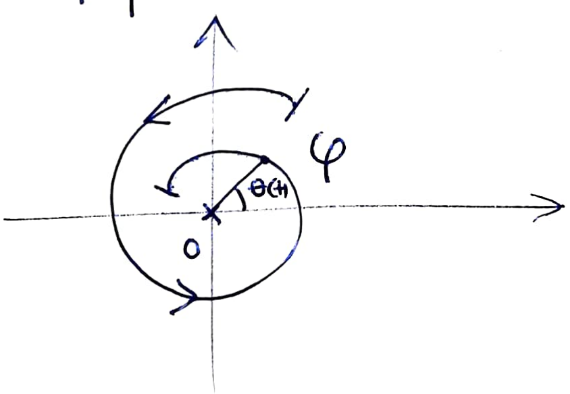
<u>Připomeňte</u>: Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je <u>uzavřená</u> (regul.) křivka a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom jsme definovali



$$\operatorname{ind}_\varphi s := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}.$$

<u>OTÁZKA</u>: Jak $\operatorname{ind}_\varphi s$ vypočítat? <u>BÚNO</u>: $s = 0$

<u>Polární vyjádření</u>: Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá.



<u>Víme</u>: $0 \neq z = |z| e^{i\theta} = e^{\phi}$, kde $\theta \in \arg(z)$ a $\phi = \log|z| + i \cdot \theta \in \operatorname{Log}(z)$.

$\forall t \in [\alpha, \beta]$: $0 \neq \varphi(t) = |\varphi(t)| e^{i\theta(t)} = e^{\phi(t)}$, kde $\theta(t) \in \arg(\varphi(t))$ a $\phi(t) = \log|\varphi(t)| + i\,\theta(t) \in \operatorname{Log}(\varphi(t))$.

<u>DEF.</u> Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá. Řekneme, že $\theta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ (resp. $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$) je <u>jednoznač. větev argumentu</u> (resp. <u>j.v. logaritmu</u>) křivky φ, pokud je θ (resp. ϕ) spojitá na $[\alpha, \beta]$ a $\forall t \in [\alpha, \beta]$: $\theta(t) \in \arg(\varphi(t))$ (resp. $\phi(t) \in \operatorname{Log}(\varphi(t))$).

VI 2

Pozn: Vždy ex. j.v. argumentu a logaritmus pro spojitou křivku φ (Cv.)*. Dokážeme si to jen pro regulární křivky.

Věta (o jednoznačnosti j.v. argumentu a log)
Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá křivka. Potom
(i) Φ je j.v. logaritmus φ, právě když $\operatorname{Re} \Phi = \log|\varphi|$ a $\operatorname{Im} \Phi$ je j.v. argumentu φ;
(ii) Jsou-li Θ_1, Θ_2 j.v. argumentu φ, potom ex. $k \in \mathbb{Z}$, že $\Theta_2 = \Theta_1 + 2k\pi$.

Důkaz: (i) z definice argumentu a logaritmu.
(ii) Pro každ. $t \in [\alpha, \beta]$ ex. $k(t) \in \mathbb{Z}$, že
$$\Theta_2(t) = \Theta_1(t) + 2k(t) \cdot \pi.$$
Protože $k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{Z}$ je spojitá, je k konst. na $[\alpha, \beta]$. ∎
souv.

VĚTA (o existenci j.v. logaritmu pro regul. křivky)

Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ je regulární křivka. Potom ex. j.v. logaritmu Φ křivky φ a platí, že

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Navíc $\operatorname{Im}\Phi$ je j.v. argumentu φ.

DŮKAZ: Hledáme spojité Φ takové, že $\varphi = e^{\Phi}$.

Spočítejme $\displaystyle\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt.$

Položme $\displaystyle\Phi_0(s) := \int_{\alpha}^{s} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt$, $s \in [\alpha,\beta]$.

Potom Φ_0 je spoj. na $[\alpha,\beta]$ a $\Phi_0' = \dfrac{\varphi'}{\varphi}$ na $[\alpha,\beta]\setminus K$, kde K je konečná. Potom na $[\alpha,\beta]\setminus K$ je

$$(\varphi \cdot e^{-\Phi_0})' = (\varphi' - \varphi\,\Phi_0')\,e^{-\Phi_0} = 0.$$

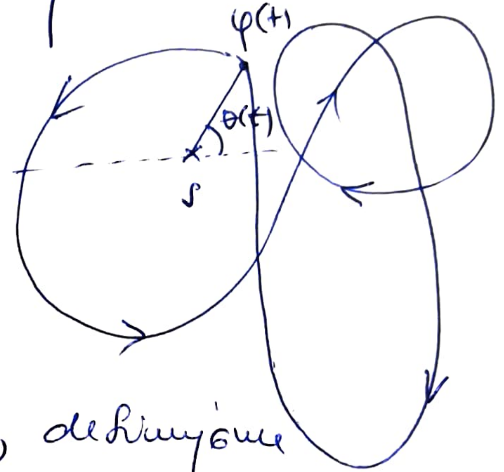
Tedy ex. $c \in \mathbb{C}$, že $\varphi \cdot e^{-\Phi_0} = e^{c}$ na $[\alpha,\beta]$.

Položme $\Phi := \Phi_0 + c$. $\blacksquare$

VĚTA (o výpočtu indexu)

Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je uzavřená regulární křivka a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Nechť $\tilde\varphi := \varphi - s$ a θ je jiv. argumentu křivky $\tilde\varphi$.

Potom



$$(*) \quad \mathrm{ind}_\varphi s = \mathrm{ind}_{\tilde\varphi} 0 = \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi}.$$

Speciálně, $\mathrm{ind}_\varphi s \in \mathbb{Z}$.

Pozn: (i) Je-li φ pouze spojitá, definujeme $\mathrm{ind}_\varphi s$ vztahem $(*)$.

(ii) Z $(*)$ jasné, že $\mathrm{ind}_\varphi s$ je počet otočení φ kolem s proti směru hodinových ručiček.

Matemat. formulace.

Důkaz: Máme, že

$$\mathrm{ind}_\varphi s \underset{\uparrow\, z = \varphi(t)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - s}\, dt \underset{\uparrow\, z = \varphi(t) - s}{=} \mathrm{ind}_{\tilde\varphi} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde\varphi} \frac{dz}{z} \overset{\text{VĚTA}}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\phi(\beta) - \phi(\alpha)\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(i \operatorname{Im}\phi(\beta) - i \operatorname{Im}\phi(\alpha)\right) = \underbrace{\frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi}}_{= k}$$

~~$= 2\pi k$~~ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$,

kde ϕ je jiv. logaritmu $\tilde\varphi$, $\operatorname{Re}\phi(\beta) = \log|\tilde\varphi(\beta)| = \log|\tilde\varphi(\alpha)| = \operatorname{Re}\phi(\alpha)$ a $\underset{\theta}{\underset{\Vert}{\operatorname{Im}\phi}}$ je jiv. argumentu $\tilde\varphi$. ∎

Пр. Одреди $\operatorname{ind}_{-3}\varphi$, ако

$$\varphi(t) := \underbrace{(4+\cos^2 t)\, e^{i\pi \cdot \sin t}}_{\tilde{\varphi}(t) :=} - 3, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

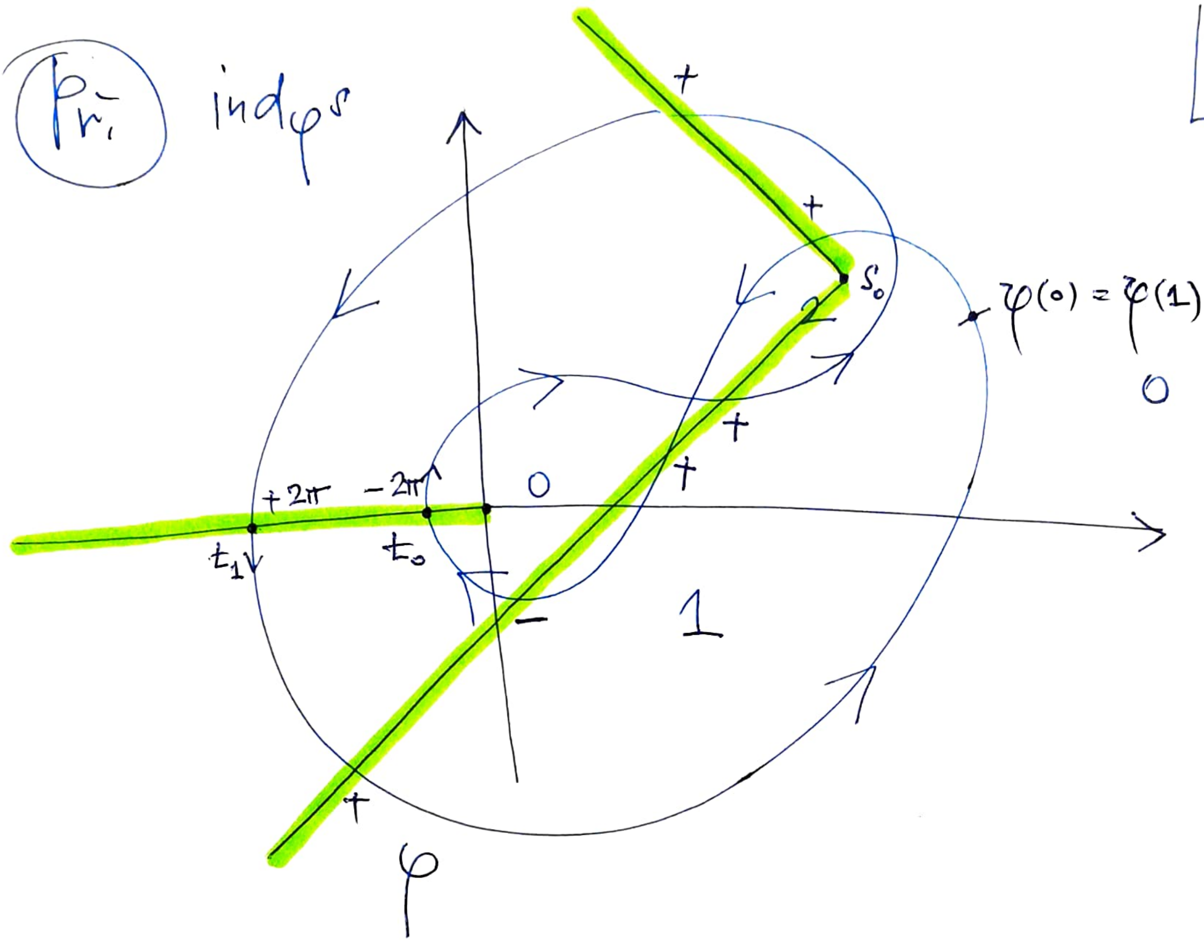
- $\varphi(\pm \pi/2) = 4 \cdot e^{\pm i\pi} - 3 = -7 \Rightarrow \varphi$ је затворена

- $\theta(t) := \pi \cdot \sin t$ је н.в. аргумента $\tilde{\varphi} \Rightarrow$

$$\operatorname{ind}_{-3}\varphi = \frac{\theta(\pi/2) - \theta(-\pi/2)}{2\pi} = 1$$

VI 4 f

Při $\mathrm{ind}_\varphi 0$



- Položme
$$\Theta(t) := \begin{cases} \arg(\varphi(t)), & 0 \le t < t_0 \\ \arg(\varphi(t)) - 2\pi, & t_0 \le t \le t_1 \\ \arg(\varphi(t)), & t_1 < t \le 1. \end{cases}$$
- Potom Θ je jiv. argumentu φ a
$$\mathrm{ind}_\varphi 0 = \frac{\Theta(1) - \Theta(0)}{2\pi} = 0.$$

MAŘÍKOVA VĚTA: Podobně pro $s_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ a polopřímku vycházející z bodu s_0 (ne nutně rovnoběžnou s $(-\infty, 0]$).
Potom $\mathrm{ind}_\varphi s_0 = 2$ pro s_0 jako na OBR.