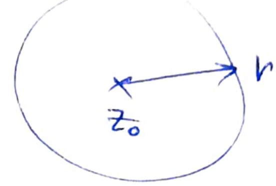
8. cvičení

CV8
1



Izolované singularity

Nechť f je holomorfní na $P(z_0,r) = P(z_0,0,r)$.
Potom
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in P(z_0,r),$$

Máme 3 možnosti.

(1.) Nechť $a_n = 0$ pro všechna $n<0$. Potom

(1) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in P(z_0,r)$$

tudíž $f \in \mathcal{H}(U(z_0,r))$ po dodefinování $f(z_0)=a_0$.
Speciálně, $\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}}$, tzn. z_0 je odstranitelná singularita f.

Př. $f(z) := \dfrac{\sin z}{z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Potom $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},$$
f má v 0 odstranitelnou singularitu a
$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Cvi 8
2

(2.) Nechť $p \in \mathbb{N}$ je takové, že
$a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0 \ \forall n < -p$.

Potom pro každé $z \in P(z_0, r)$ je

$$(2) \quad f(z) = \frac{\overset{\neq 0}{a_{-p}}}{(z-z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^p} \cdot g(z),$$

kde $g(z) := \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+p} \in \mathcal{H}(U(z_0,r))$ a

$$g(z_0) = a_{-p} \neq 0.$$

Potom $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k \cdot f(z) \overset{(2)}{=} \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{k-p} \cdot g(z)$ ($a_{-p} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$)

$$= \begin{cases} \infty, & k<p \\ \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, & k=p \\ 0, & k>p \end{cases} \qquad (2^*)$$

Speciálně, $\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty}$, tzn. z_0 je pól f.

Číslo p se nazývá <u>násobnost</u> <u>pólu</u> z_0 fce f.

<u>Pozn:</u> Píšeme $f(z) \sim g(z)$ pro $z \to z_0$, je-li
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

CV8 3

Potom z (2^*) máme $f(z) \sim \frac{1}{(z-z_0)^p}$ pro $z \to z_0$.

Př. $f(z) := \frac{e^z - 1}{z^{10}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Potom $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-10}}{n!}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

0 je pól f násobnosti 9, $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ a

$\lim_{z \to 0} z^9 f(z) = 1$, tzn. $f(z) \sim \frac{1}{z^9}$ pro $z \to 0$.

(3.) Nechť $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n<0$.

Ukážeme, že potom $\boxed{\text{neexistuje } \lim_{z\to z_0} f(z) \text{ v } \mathbb{S}}$,

tzn. z_0 je podstatná singularita f.

Př. $f(z) := \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Potom $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

0 je podstat. sing. f a neexistuje $\lim_{z\to 0} f(z)$

v $\mathbb{S}$ (např. pro $z_k := \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} \longrightarrow 0$ pro $k \to \infty$

je $f(z_k) = (-1)^k$).

Př. $F(z) := e^z \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ má v 0 podst. singularitu

(protože $F(z_k) = e^{z_k}(-1)^k$ nemá limitu v $\mathbb{S}$)

Urči typ všech izolovaných singularit (včetně ∞) u následujících funkcí. U pólů urči jejich násobnost.

Př. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)^2} = \dfrac{1}{z\cdot(z-2i)^2(z+2i)^2}$

(i) f má v 0 pól násobnosti 1 (tzv. jednoduchý pól), protože $\lim\limits_{z\to 0} z\cdot f(z) = \frac{1}{4^2} \neq 0$, tzn.

$$f(z) \sim \frac{1}{z} \text{ pro } z \to 0$$

(ii) f má ~~v~~ $\pm 2i$ dvojnásobný pól (tzn. pól násobnosti 2)

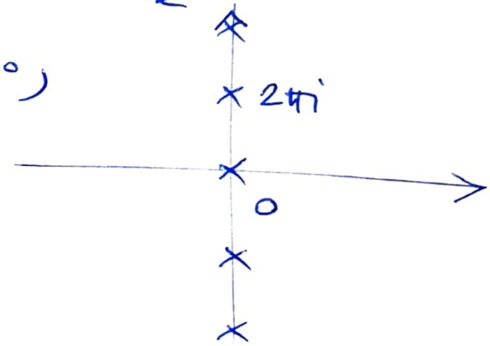
DEF Řekneme, že f má v ∞ odstranitelnou, podstatnou singularitu nebo pól, pokud má takovou singularitu $f\left(\frac{1}{z}\right)$ v 0.

(iii) f má v ∞ odstranitelnou sing., protože

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Př. $f(z) = \dfrac{\sin^3 z}{(e^z - 1)^{10}}$

- izolované sing. f: $e^z = 1 \iff z = \underbrace{2k\pi i}_{=z_k}, \ k \in \mathbb{Z}$



1. $z_0 = 0$: $f(z) \sim \dfrac{z^3}{z^{10}} = \dfrac{1}{z^7}$ pro $z \to 0$,

   protože $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$ a

   $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = 1.$

   f má v 0 pól násobnosti 7

2. $z_k, \ k \neq 0$: $f(z) \sim \dfrac{1}{(z - z_k)^{10}}$ pro $z \to z_k$,

   protože $\lim\limits_{z\to z_k} \dfrac{e^z - 1}{z - z_k} = (e^z)'\Big|_{z=z_k} = e^{z_k} = 1.$

   f má v z_k pól násobnosti 10

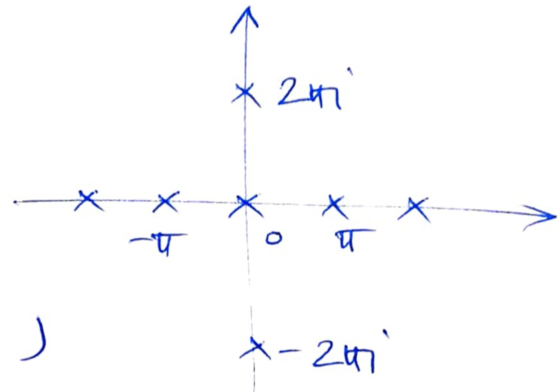
3. POZOR: ∞ není izolovaná singularita f!

[Kopáček], př. 323 – 337

Př. $f(z) := \dfrac{1}{(e^z-1)^2} - \dfrac{1}{\sin^2 z}$

• izolované singularity: $2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ a $l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$

(i) v 0: Máme na $P(0,\pi)$



$$f(z) = \frac{\sin^2 z - (e^z-1)^2}{(e^z-1)^2\cdot\sin^2 z} = \frac{-z^3 + \frac{1}{3}z^4+\dots}{z^4+\dots} = -\frac{1}{z}+\dots,$$

protože $\sin^2 z = \left(z - \frac{z^3}{6}+\dots\right)^2 = z^2 + z^4\underbrace{\left(-\frac{2}{6}\right)}_{=-\frac{1}{3}} + \dots$

$$(e^z-1)^2 = \left(z+\frac{z^2}{2}+\dots\right)^2 = z^2+z^3+\dots$$

Tedy 0 je jednoduchý pól f a $\boxed{\underbrace{\operatorname{res}_0 f}_{=a_{-1}} = -1}$.

(ii) $z_k := 2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ a $k\neq 0$:

$g(z) := \dfrac{1}{(e^z-1)^2}$ má v z_k dvojnásobný pól, protože

$$\lim_{z\to z_k}\frac{e^z-1}{(z-z_k)} = (e^z)'\Big|_{z=z_k} = e^{z_k} = 1,$$ skutečně

$g(z)\sim\dfrac{1}{(z-z_k)^2}$ pro $z\to z_k$. Proto i f má dvojnás. pól v z_k!

(iii) $w_l := l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$ a $l\neq 0$:

$h(z) := \dfrac{1}{\sin^2 z}\sim\dfrac{1}{(z-w_l)^2}$ pro $z\to w_l$, protože

$$\lim_{z\to w_l}\frac{\sin z}{z-w_l} = \sin' z\Big|_{z=w_l} = \cos(w_l) = (-1)^l.$$

Tudíž f má ve w_l dvojnásobný pól.

Pří $f(z) := e^{z - \frac{1}{z}}$ [334]

CVS 6

(i) f má v 0 podst. singularitu, protože v $\mathbb{C}$ neexistuje $\lim_{z \to 0} f(z)$.

Skutečně, $g(z) := e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\, z^n}$ má v 0 podstat. singularitu, tudíž v $\mathbb{C}$ neexistuje $\lim_{z \to 0} g(z)$. Tzn. existuje $0 \neq z_k \to 0$ tak, že $\{g(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$ nekonverguje v $\mathbb{C}$. Potom ale ani $\{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$ —"—, protože

$f(z_k) = \underbrace{e^{z_k}}_{\to 1} \cdot g(z_k)$.

(ii) f má v ∞ podst. singularitu (podobně jako (i)).