6. cvičení

Mocninné řady

Na přednášce bylo ukázáno, že $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$, právě když

(TŘ) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in U(z_0, R),$$

kde $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Taylorovy řady (TŘ)

1. $$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

2. $$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

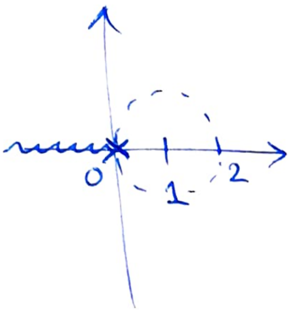
3. $$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$$

4. $$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n, \quad |z| < 1 \text{ a } a \in \mathbb{C}$$

atd.

stačí spočítat Taylorovy koeficienty a_n.

ad (3.) Pro $f(z) = -\log(1-z)$ je $a_0 = f(0) = 0$,



$$f'(z) = +\frac{1}{1-z} \qquad a_1 = 1$$

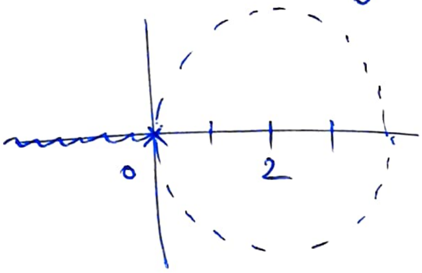
$$f''(z) = +\frac{1}{(1-z)^2} \qquad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$f'''(z) = +\frac{2}{(1-z)^3} \qquad a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!}{(1-z)^n} \qquad a_n = \frac{1}{n}$$

Př. TŘ log kolem 2: Máme



$$\log z \overset{!}{=} \log 2 + \log(z/2) =$$

$$= \log 2 + \log\left(1 + \frac{z-2}{2}\right) \overset{(3.)}{=}$$

$$= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-2)^n}{2^n \cdot n}, \quad |z-2| < 2.$$

DERIVOVÁNÍ MŘ: Platí-li (TŘ), je

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z-z_0)^{n-1}, \quad z \in U(z_0, R).$$

Př. Geometrická řada

$\Updownarrow$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1}, \quad |z| < 1$$

$$\frac{k!}{(1-z)^{k+1}} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\, z^{n-k}, \quad |z|<1$$

⋮

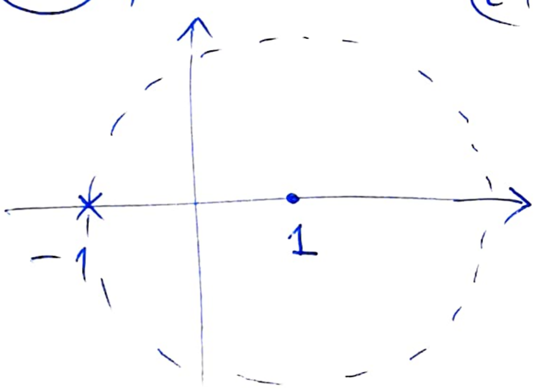
Př. Pro $f(z) = -\log(1-z)$ je

$$f'(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1,$$

tudíž $n\cdot a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ a $a_0 = f(0) = 0$.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Př. (ii) TŘ $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ kolem 1: Máme



$$f(z) = \frac{(z-1)^2 + 2(z-1) + 1}{((z-1)+2)^2},$$

$$\frac{1}{((z-1)+2)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^2}$$

$$|\cdots|<1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad |z-1|<2 \quad \text{atd.}$$

(i) Nejprve $\dfrac{1}{(z+1)^2}$ a z^2.

Pozn: Pro obecnou racionální funkci rozložíme na polynom a jednoduché zlomky, které potom rozvineme do MŘ.

Násobení MŘ

Nechť $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ a $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ mají poloměr konvergence aspoň $R>0$. Potom

$$f(z)\cdot g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

má poloměr konvergence aspoň R a platí, že

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Skutečně, máme $c_n = (f\cdot g)^{(n)}(z_0)/n! \overset{\text{Leibniz}}{=}$

$$=\frac{1}{\cancel{n!}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cancel{n!}}{k!\,(n-k)!} f^{(k)}(z_0)\cdot g^{(n-k)}(z_0)=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Př. Pro $|z|<1$ je $f(z):=e^z\cdot \log(1+z)=$

$$=\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\dots\right)\cdot\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots\right)$$

$$=z+z^2\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}_{\frac{1}{2}}+z^3\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{3}}+\dots$$

CV6 $\surd$

<u>Dělení MŘ</u>: Nechť jsou f, g jako výše.

Je-li $g(z_0) = b_0 \neq 0$, ex. $R' \in (0, R]$ takové, že $g \neq 0$ na $U(z_0, R')$. Potom na $U(z_0, R')$ je

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

kde c_n jsou jednoznačně určeny rovnicemi

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

[skutečně, $a_0 = \underset{\neq 0}{b_0} c_0 \Rightarrow c_0 = a_0 / b_0$

$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \Rightarrow c_1 = \ldots$

$\vdots$

$a_n = \underset{\neq 0}{b_0} c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0 \Rightarrow c_n = \ldots$]

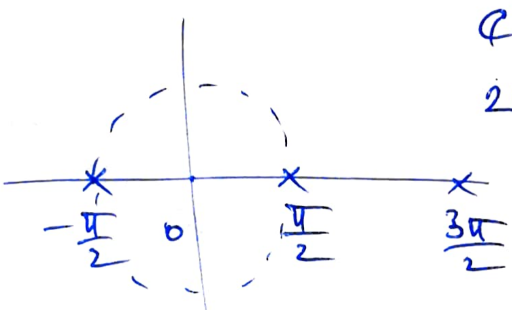
Př. $f(z) = \operatorname{tg} z \overset{\text{def.}}{:=} \dfrac{\sin z}{\cos z}$

(i) $\cos z = 0 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 0$

$e^{2iz} = -1 = e^{\pi i}$

$2iz = \pi i + 2k\pi i$

$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



(ii) Pro $|z| < \frac{\pi}{2}$ je $\operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15} z^5 + \ldots$, protože

CV6
6

$$\operatorname{tg} z = \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots\right) : \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots\right) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15} z^5 + \dots$$

$$-\left(z - \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{24} - \dots\right)$$

$$\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} + \dots$$

$$-\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{6} + \dots\right)$$

$$\frac{2}{15} z^5 + \dots$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{24} = \frac{-4}{120} = -\frac{1}{30}$$

$$-\frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

Najdi TR kolem 0:

Pri $f(z) = e^z \cdot \cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z}\right) =$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

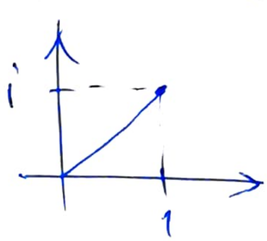
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_0^\infty \frac{(1+i)^n}{n!} z^n + \sum_0^\infty \frac{(1-i)^n}{n!} z^n\right)$$

$$= \sum_0^\infty 2^{n/2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

protože

$$\frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2} = 2^{n/2} \cdot \frac{e^{in\pi/4} + e^{-in\pi/4}}{2} = 2^{n/2} \cdot \cos(n\pi/4),$$

$$(1 \pm i)^n = \left(2^{1/2} e^{\pm i \pi/4}\right)^n = 2^{n/2} e^{\pm i\pi \cdot n/4}$$



CVIČ 7

Př. $f(z) = \sin^3(z) \overset{?}{=} \frac{1}{4}\left(3\cdot\sin z - \sin(3z)\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(3\cdot\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} - \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 3^{2n+1} z^{2n+1}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z\in\mathbb{C}$$

—— x ——

? platí, protože

$$\underbrace{\cos(3z)}_{\text{sudá č.}} + i\cdot\underbrace{\sin(3z)}_{\text{lichá č.}} = e^{3iz} = (\cos z + i\sin z)^3 =$$

$$= \cos^3 z + 3i\cos^2 z\cdot\sin z - 3\cos z\cdot\sin^2 z - i\cdot\sin^3 z,$$

tudíž $\cos(3z) = \cos^3 z - 3\cos z\cdot\underbrace{\sin^2 z}_{1-\cos^2 z} =$

$$= 4\cos^3 z - 3\cos z$$

$\sin(3z) = 3\underbrace{\cos^2 z}_{1-\sin^2 z}\sin z - \sin^3 z = 3\sin z - 4\sin^3 z.$

—— x ——

Podobně $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$

$\sin^k z = \ldots$

$\cos^k z = \ldots$

—— x ——

- Taylorovy řady: Kopáček, př. 255 – 278
- součet MŘ: př. 227 – 235
- ODR v $\mathbb{C}$ – Metoda neurčitých koeficientů* př. 244 – 250

Metoda neurčitých koeficientů

Př. Vyřešte v $\mathbb{C}$ následující diferenc. rovnici

(*) $f''(z) + z f'(z) + f(z) = 0$

na okolí 0.

Předp., že $f \in \mathcal{H}(U(0,R))$ řeší ~~ve~~ (*).

Potom $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in U(0,R)$ a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1}, \quad -\|-$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) z^{n-2} \; {}^{*)}, \quad -\|-$$

Protože (*) platí, dostaneme

u z^0: $a_0 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}$

z^1: $a_1 + a_1 + 6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3}$

z^n: $(n+1)a_n + a_{n+2}(n+1)(n+2) = 0$
$n \geq 1$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)}}$$

$$\boxed{a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!!} a_0} \qquad \boxed{a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} a_1}$$

---

*) $f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) z^n$

Neboli $f(z) = a_0 f_0(z) + a_1 f_1(z)$, kde

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} z^{2k} \quad \text{a} \quad f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} z^{2k+1}$$

řešení (*)

$f_0(0) = 1$, $f_0'(0) = 0$

řešení (*)

$f_1(0) = 0$, $f_1'(0) = 1$

a $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$. Řady f_0, f_1 konv. na celém $\mathbb{C}$, tzn. řeší (*) na $\mathbb{C}$.

[Kopáček, str. 244–250.]