4. cvičení

Mocninné řady – konvergence

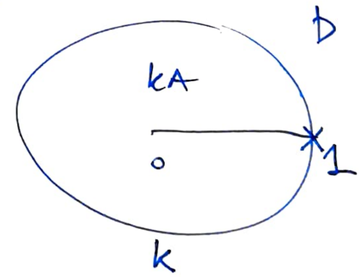
[Ko] př. 209 – 226

Př. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (z \in \mathbb{C})$ (*)

Abs. konvergence:

- $\sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n}} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow |z| < 1 \Rightarrow$ (*) konv. abs.
  $> 1 \Rightarrow$ diverguje

- Je-li $|z| = 1$, potom $\sum_{1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$



Neabs. konv.

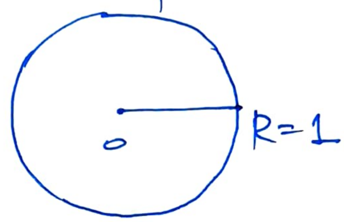
- $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

- Nechť $|z| = 1$ a $z \neq 1$. Protože $1/n \downarrow 0$ a
  $$\left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left| z \cdot \frac{1-z^N}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|},$$
  z Dirichlet. kritéria (*) konverguje.

Poloměr konvergence

Př: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ | $|z|<1$

- diverguje na $|z| \geq 1$, protože $1 \leq |z^n|$, tudíž $z^n \not\to 0$
- $R = 1$



Př: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$; $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = 1$

Je-li $|z| \leq 1$, potom $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ & $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$,

tudíž řada konv. abs. na $|z| \leq 1$.

Př: Urči poloměr konvergence

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+(-1)^n)^n}{n} \cdot (z-1)^n$ [1/6]

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$ [4, podílové kritérium]

(iii) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} (z+1)^n$ [1/3]

(iv) $\sum_{1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ [1/e]

Rovinné vektorové pole*

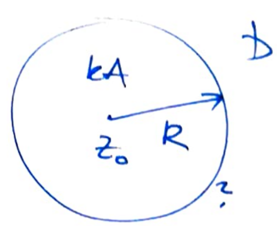
Mocninné řady

VĚTA: Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Potom existuje jediné $R \in [0, +\infty]$ (tzv. poloměr konvergence (1)) takové, že

1. (1) konv. absolutně na kruhu $|z-z_0| < R$ a
2. (1) diverguje na $|z-z_0| > R$.



Navíc platí $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$,

kde definujeme $\frac{1}{0} := +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} := 0$.

Pozn: Na $|z-z_0| = R$ o konvergenci (1) nelze nic říct.

DŮKAZ: odmocninovým (Cauchyho) kritériem.

Je-li $1 > \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n \cdot (z-z_0)^n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-z_0|$, potom (1) konv. abs.

Je-li $1 <$ —||— —||—, potom (1) diverguje. ∎

Pozn: V UKA ukážeme, že $f \in \mathcal{H}(U(z_0,R))$, právě když $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in U(z_0,R)$; navíc $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1}$, $z \in U(z_0,R)$.