Obecná mocnina

DEF. Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom hlavní hodnotu α-té mocniny z definujeme

$$z^{\alpha} := \exp(\alpha \cdot \log z).$$

Položme $m_{\alpha}(z) := \{\exp(\alpha \cdot w) \mid w \in \operatorname{Log} z\}$.

α-té mocniny z

Vlastnosti: (1) $e^{z} = \exp(z \cdot \underbrace{\log e}_{=1}) = \exp(z)$

(2.) Je-li $z>0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s MA.

(3.) $m_\alpha(z) = \{ z^\alpha \cdot e^{2k\pi i \alpha} \mid k \in \mathbb{Z} \}$, $z \neq 0$

$\ulcorner w \in \mathcal{L}og\, z \Leftrightarrow w = \log z + 2k\pi i \lrcorner$

(4.) $(z^\alpha)' = \alpha \cdot z^{\alpha - 1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $\alpha \in \mathbb{C}$

(5.) $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z|<1$, kde

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

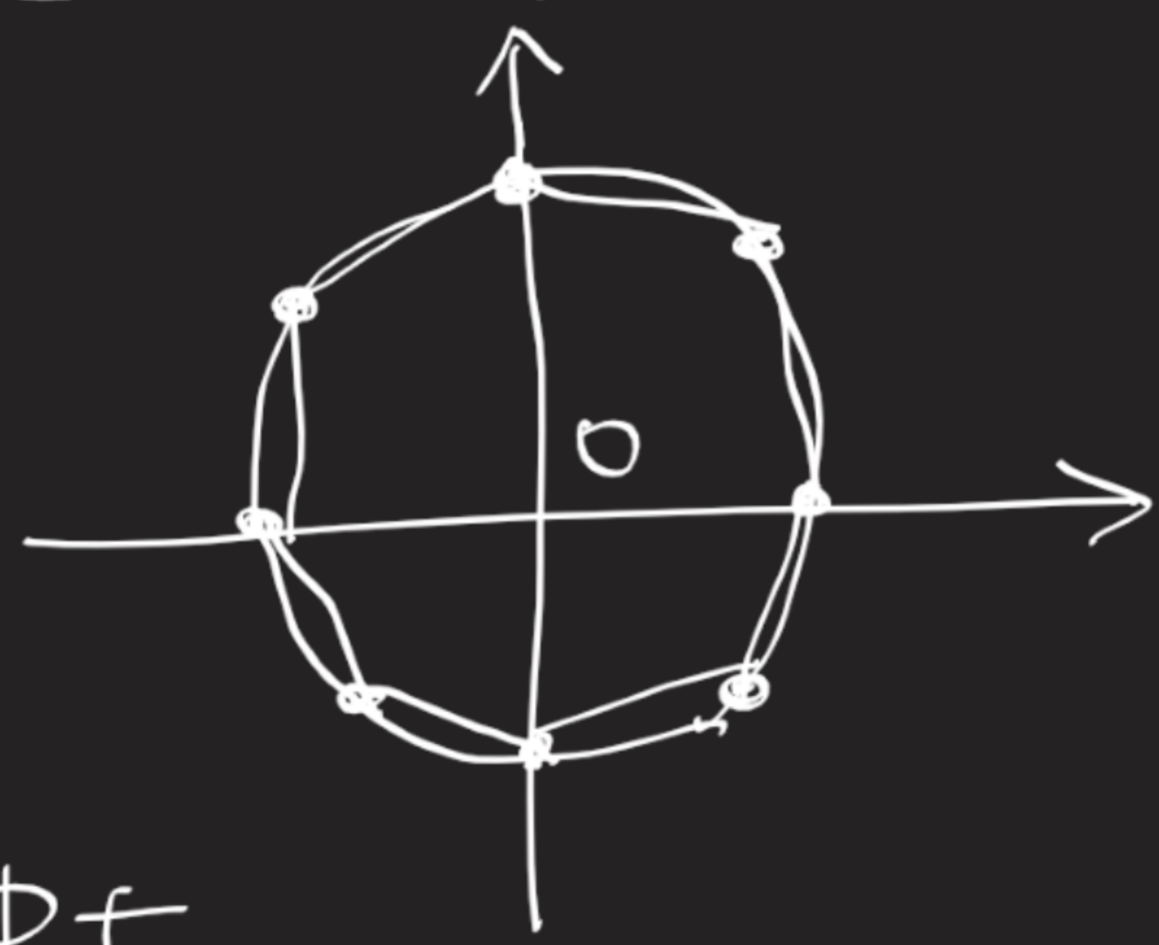
Případy: Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{ z^\alpha \}$.

(b) Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p/q$, kde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom

$$m_{\frac{p}{q}}(z) = \{ z^{\frac{p}{q}} e^{2k \cdot \frac{p}{q} \cdot \pi i} \mid k = 0, 1, \dots, q-1 \}$$

tvoří vrcholy pravidelného q-úhelníku vepsaného do kružnice o středu 0

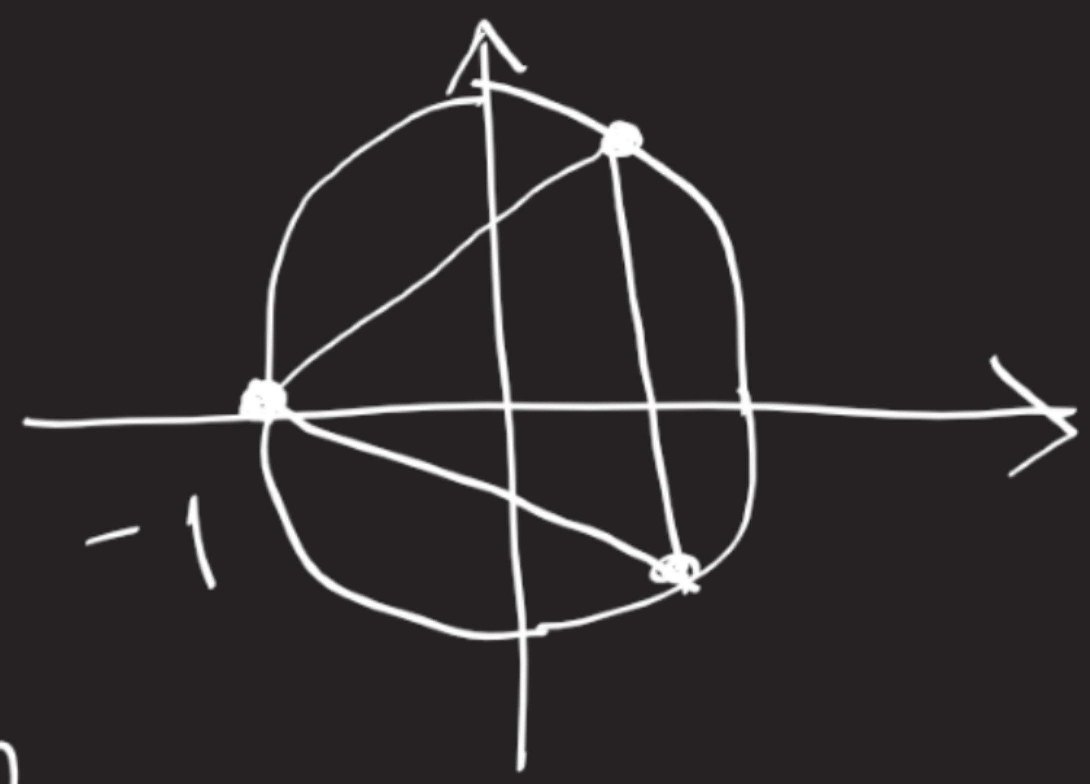


(c) Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom $m_\alpha(z)$ je nekonečná.

Př. 1.) $\sqrt{-1} = e^{\pi i/2} = i$, $\quad m_{1/2}(-1) = \{\pm i\}$

2.) $\sqrt[3]{-1} = e^{\pi i/3}$ (nesouhlasí s MA!)

$$m_{1/3}(-1) = \{e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}, -1\}$$



3.) $i^i = e^{-\pi/2}$

$$m_i(i) = \{e^{-\pi/2 + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Pozor na počítání s mocninami!

$$(z\cdot w)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$$

např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i^2 = -1$

———— x ————

Pozn: Je-li $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, potom

$$f(z) = \underbrace{\frac{f(z)+f(-z)}{2}}_{\text{sudá část}} + \underbrace{\frac{f(z)-f(-z)}{2}}_{\text{lichá č.}}$$

Hyperbolické funkce: $e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

DEF.
$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad z \in \mathbb{C}$$
$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Vlastnosti:

1.) $\cosh'(z) = \sinh(z)$, $\sinh'(z) = \cosh(z)$

2.) $\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$, kde

DEF. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Vlastnosti:

1.) cos a sin jsou rozšířením příslušných reálných fcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$

2.) $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$

3.) sin i cos jsou 2π-periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že

$$\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$$

4.) i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.

5.) $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$