11. cvičení

Aplikace RV II.

Integrály typu $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{iax}\, dx$

VĚTA: Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí

(1.) $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$,

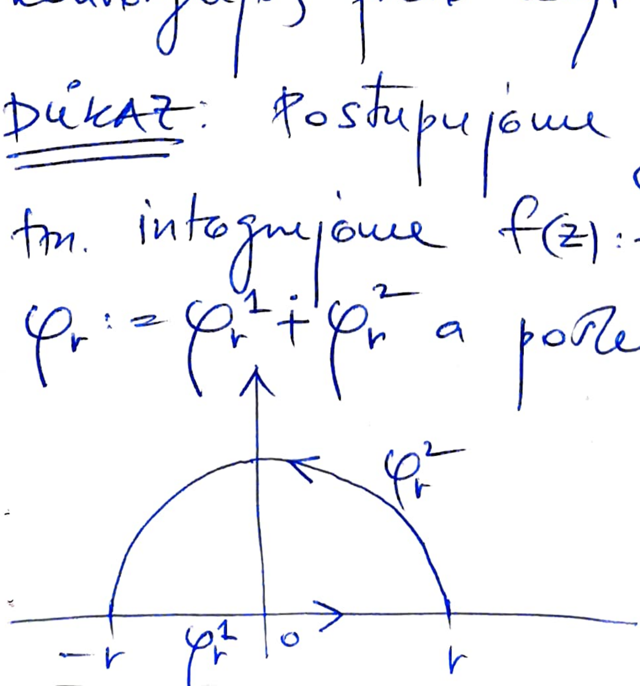
(2.) $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$.

Nechť $a > 0$. Potom

$$(1) \quad I := (N)\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(s)=0 \\ \operatorname{Im} s > 0}} \operatorname{res}_s \left(R(z)\, e^{iaz}\right).$$

Pozn: Ukažte, že Newtonův integrál v (1) konverguje, právě když platí (1.) a (2.).

DŮKAZ: Postupujeme jako pro typ $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx$, tzn. integrujeme $f(z) := R(z)\, e^{iaz}$ podél $\varphi_r := \varphi_r^1 \dotplus \varphi_r^2$ a pošleme $r \to +\infty$.



Z Jordanova lemmatu plyne, že $\int_{\varphi_r^2} f \to 0$ pro $r \to +\infty$. ▨

Jordanovo lemma

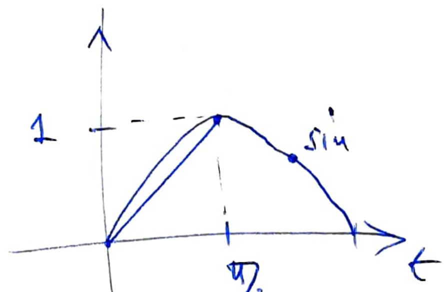
Nechť $\varphi_r^2(t) := re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy bez společných kořenů a $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$.

Je-li $\underline{\underline{a > 0}}$, potom
$$\int_{\varphi_r^2} R(z) \cdot e^{iaz} \, dz \longrightarrow 0$$
pro $r \to \infty$.

Důkaz: Máme

$$\left| \int_{\varphi_r^2} f \right| = \left| \int_0^{\pi} R(re^{it}) \, e^{aire^{it}} \cdot i \cdot r \cdot e^{it} \, dt \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\sup_{\substack{|z| = r \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} |R(z)|}_{\substack{!! \\ M(r)}} \cdot 2 \cdot r \int_0^{\pi/2} e^{-a \cdot r \cdot \sin t} \, dt \leq M(r) \cdot 2r \cdot \int_0^{\overset{+\infty}{\cancel{\pi/2}}} e^{-\frac{2ar}{\pi} t} \, dt =$$



$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$, $t \in [0, \pi/2]$

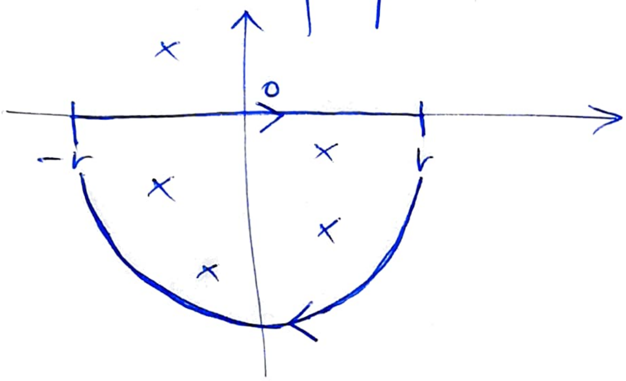
$$= M(r) \cdot 2r \cdot \frac{\pi}{2ar} = \frac{\pi}{a} \cdot M(r) \longrightarrow 0 \quad \text{pro } r \to +\infty,$$

protože $\lim_{z \to \infty} R(z) = 0$ z 2. ∎

Pozn: Je-li $a<0$, potom platí

$$I = -2\pi i \sum_{\substack{Q(s)=0 \\ \operatorname{Im} s<0}} \operatorname{res}_s \left(R(z)\, e^{iaz}\right).$$

V tomto případě musíme integrovat podél



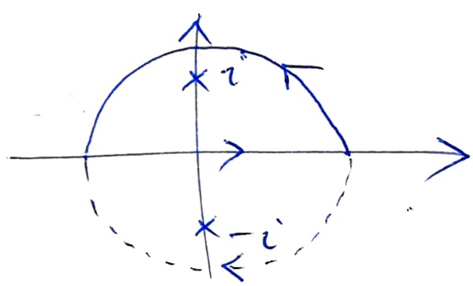
, protože Jordanovo lemma neplatí pro horní polokružnici (Proč?). Dcv.

Př. Spočti Fourierovu transformaci $\mathcal{F}f$ funkce $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$, kde

$$(\mathcal{F}f)(t) \overset{\text{def.}}{:=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)\cdot e^{itx}}_{=F(x)}\,dx, \quad t\in\mathbb{R}$$

(i) Nechť $t>0$. Potom $\mathcal{F}f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{res}_i F =$

$$= i\cdot\frac{e^{-t}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2}$$



index $= -1$

(ii) Je-li $t<0$, potom $\mathcal{F}f(t) = i\cdot\operatorname{res}_{(-i)} F\cdot(-1) =$

$$= -i\cdot\frac{e^{t}}{2(-i)} = \frac{e^{t}}{2}$$

(iii) $\mathcal{F}f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = i\cdot\operatorname{res}_i f = -i\cdot\operatorname{res}_{-i} f = \frac{1}{2}$,

protože $\operatorname{res}_{\pm i} f = \pm\dfrac{1}{2i}$

ZÁVĚR $\quad \mathcal{F}f(t) = \dfrac{e^{-|t|}}{2}, \quad t\in\mathbb{R}$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos x\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin x\,dx$

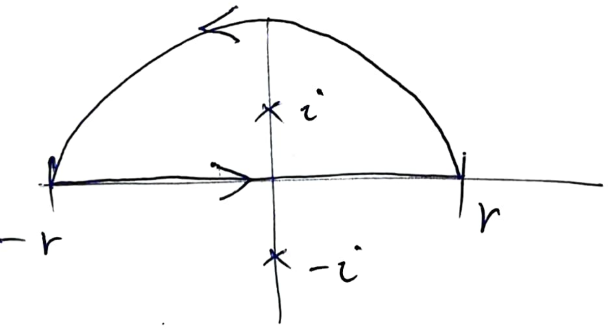
(a) Pokud racionální funkce R nemá póly na $\mathbb{R}$, převedeme tento integrál na typ $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{iax}\,dx$.

Př. (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{x \cdot e^{ix}}{x^2+1}}_{= f(x)}\,dx$

sudá reálná

$= \dfrac{\pi}{2e}$, protože $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_i f = \frac{\pi i}{e}$

$\mathrm{res}_i f \overset{(P2)}{=} \dfrac{i e^{-1}}{2i} = \dfrac{1}{2e}$



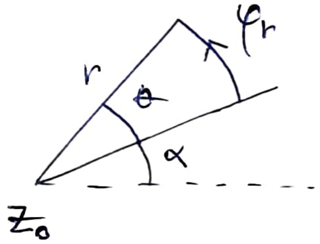
[Kopáček, př. 392–406]

(b) Pokud R na $\mathbb{R}$ má jednoduchý$^{-é}$ pól^{-y}, užijeme následující Lemma o obcházení jednoduchého pólu:

[Kopáček, 414–419]

Lemma: Nechť f má v z_0 jednoduchý pól. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$, $r > 0$ a

$$\varphi_r(t) := z_0 + re^{it}, \quad t \in [\alpha, \alpha+\theta].$$



Potom
$$\int_{\varphi_r} f \longrightarrow i\theta \cdot \operatorname{res}_{z_0} f \quad \text{pro } r \to 0+.$$

Důkaz: Máme

$$\int_{\varphi_r} f = \int_{\varphi_r} \Big(\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots}_{=\, h(z) \text{ je holomorfní na } U(z_0) \text{ omezená}} \Big)\, dz =$$

$$= a_{-1} \underbrace{\int_{\varphi_r} \frac{dz}{z-z_0}}_{=\, i\theta \,=\, \int_\alpha^{\alpha+\theta} \frac{ire^{it}\,dt}{re^{it}}} + \int_{\varphi_r} h \longrightarrow i \cdot \theta \cdot a_{-1} \quad \text{pro } r \to 0+,$$

$$\int_{\varphi_r} h \xrightarrow{(2)} 0 \quad \text{pro } r \to 0+$$

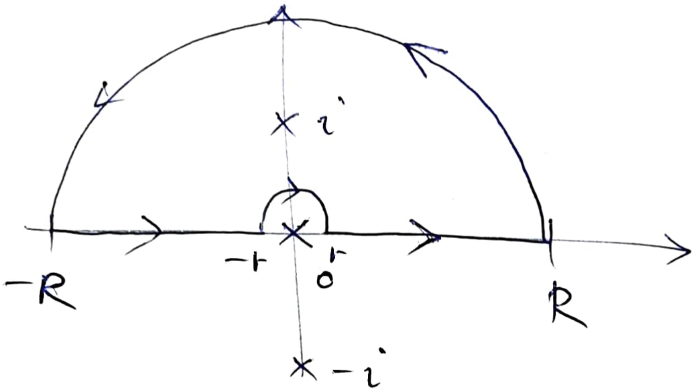
protože (2) platí:
$$\Big| \int_{\varphi_r} h \Big| \le \theta \cdot r \cdot \max_{\langle \varphi_r \rangle} |h| \longrightarrow 0 \quad \text{pro } r \to 0+.$$
omezená

$\blacksquare$

Př.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\cdot(x^2+1)}\,dx =: I$$
sudá

Uvažme $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{2z(z^2+1)}$.

Nechť $R>r>0$ a $\varphi = \varphi_{R,r} := [-R,-r] \dotplus (\dot{-}\varphi_r) \dotplus [r,R] \dotplus \varphi_R$, kde $\varphi_\rho(t) := \rho e^{it}$, $t\in[0,\pi]$.



Je-li $R>1>r>0$, potom
$$2\pi i\cdot \operatorname{res}_i f \overset{(RV)}{=} \int_\varphi f = \int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f - \int_{\varphi_r} f + \int_{\varphi_R} f$$

$$\operatorname{Im}(2\pi i\cdot\operatorname{res}_i f) = \underbrace{\int_{-R}^{-r}\operatorname{Im} f + \int_r^R \operatorname{Im} f}_{\to\, I} - \underbrace{\operatorname{Im}\int_{\varphi_r} f}_{\to\, \operatorname{Im}(i\pi\cdot\operatorname{res}_0 f)} + \underbrace{\operatorname{Im}\int_{\varphi_R} f}_{\to\, 0}$$

$r\to 0+$
$R\to +\infty$

z Jordanova lemmatu

Tedy $I = \operatorname{Im}\left(2\pi i\cdot\operatorname{res}_i f + \pi i\cdot\operatorname{res}_0 f\right) =$
$= -\dfrac{\pi}{2e} + \dfrac{\pi}{2} = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)}}$, protože

$\operatorname{res}_i f = \dfrac{e^{-1}}{2i\cdot 2i} = -\dfrac{1}{4e}$, $\operatorname{res}_0 f = \dfrac{1}{2}$

Integrály typu $I=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos x\,dx$, $J=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin x\,dx$

VĚTA*: Nechť R je racionální fce, která nabývá v $\mathbb{R}$ jen reálných hodnot. Potom Newtonův integrál I (resp. J) konverguje, právě když platí:

(1.) každý reálný pól R je jednoduchý a je lichým násobkem $\pi/2$ (resp. celým násobkem π)

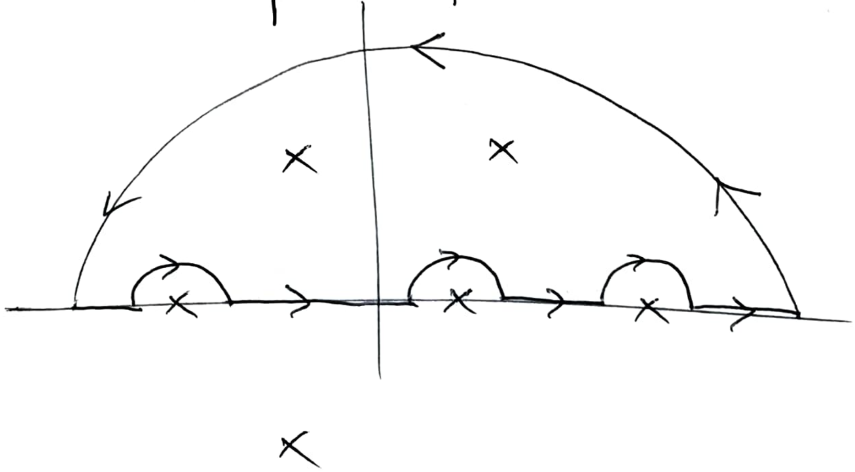
(2.) $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy a $\operatorname{st} Q > \operatorname{st} P$.

Platí-li (1.) a (2.) a položíme-li

$$K := 2\pi i \sum_{\substack{Q(s)=0\\ \operatorname{Im} s>0}} \operatorname{res}_s\left(R(z)e^{iz}\right) + \pi i \sum_{\substack{Q(s)=0\\ \operatorname{Im} s=0}} \operatorname{res}_s\left(R(z)e^{iz}\right),$$

potom $I = \operatorname{Re} K$ (resp. $J = \operatorname{Im} K$).

Pozn: Integrujeme podél křivek



$F(z) := R(z)\,e^{iz}$. ▨