

Úvod do komplexní analýzy

Roman Lávička

20. února 2021

Obsah

1	Zavedení základních pojmů	2
2	Lineární zobrazení	2
3	Diferencovatelnost	3
4	Elementární funkce v $\mathbb{C}$	5
4.1	Exponenciála	5
4.2	Logaritmus	5
4.3	Obecná mocnina	6
4.4	Hyperbolické funkce	7
4.5	Goniometrické funkce	7
5	Křivkový integrál	8
6	Mocninné řady	16
7	Riemannova sféra	19
7.1	Izolované singularity	21
7.2	Laurentovy řady	23
7.3	Holomorfní funkce na mezikružích	23
7.4	Izolované singularity 2	25
7.5	Reziduum	26
8	Speciální typy integrálů	27
9	Index	29
10	Obecná Cauchyho věta a reziduová věta pro cykly	30
11	Zajímavé funkce	33
11.1	Funkce Gama	33
11.2	Riemannova zeta funkce	34
11.3	Prvočíselná věta	36

1 Zavedení základních pojmů

$\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2. Definujeme v něm *Euklidovskou normu* a *metriku*:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\rho(z, w) := |z - w|$, $z, w \in \mathbb{R}^2$

Definice 1.1. Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž definujeme navíc:

- násobení $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$
- ztotožňujeme $(x, 0) \cong x$, neboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- značíme $i = (0, 1)$

Značení 1.2. Necht $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

- $\bar{z} := x - iy$ je *komplexně sdružené číslo* k z ,
- $\operatorname{Re}(z) := x$ je *reálná část* z , $\operatorname{Im}(z) := y$ je *imaginární část* z ,
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je *modul* nebo *absolutní hodnota* z .

Vlastnosti 1.3.

Vlastnosti $\mathbb{C}$. Necht $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

- Potom $z = x + iy$ a $(\pm i)^2 = -1$.
- Násobení v $\mathbb{C}$ zahrnuje násobení v $\mathbb{R}$ i násobení skalárem v $\mathbb{R}^2$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$, $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $|zw| = |z| \cdot |w|$, $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$,
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, je-li $z \neq 0$,
- $\mathbb{C}$ je těleso.

Pozor, $\mathbb{C}$ nelze *rozumně* uspořádat!

- $i > 0 \implies -1 = i^2 > 0$,
- $i < 0 \implies -1 = i^2 > 0$.

2 Lineární zobrazení

Definice 2.1. $\mathbb{R}^2$ je reálný vektorový prostor dimenze 2, jeho báze je $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$. Obecné $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ je *komplexní vektorový prostor* dimenze 1, jeho báze je $\{1\}$. Obecné $\mathbb{C}$ -lineární zobrazení $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz$, $z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$. Necht $z = (x + iy)$, $w = (a + ib)$. Potom

$$Lz = (a + ib)(x + iy) = (ax - by, bx + ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pozorování 2.2. $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení (1) je $\mathbb{C}$ -lineární, právě když $d = a$, $c = -b$.

Poznámka 2.3. $\mathbb{C}$ -lineární zobrazení jsou velmi specifická $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení.

Úmluva 2.4. Nebude-li řečeno něco jiného, *funkce* znamená *komplexní funkci komplexní proměnné*. Na $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se můžeme vždy dívat jako na $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, protože $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Nechť f je funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Spojitost a limita se definuje stejně jako v základním kurzu matematické analýzy.

Definice 2.5. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$ značíme $U(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ a nazýváme ji *okolí* z_0 . Dále $P(z_0, \delta) := U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ nazýváme *prstencové okolí*. Pokud δ není důležité, budeme často psát jen $U(z_0)$, $P(z_0)$.

Potom definujeme

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in P(z_0, \delta) : f(z) \in U(L, \varepsilon)$
- f je spojitá v z_0 , pokud $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

3 Diferencovatelnost

Definice 3.1. Funkce f je v z_0 $\mathbb{R}$ -diferencovatelná, pokud existuje $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Poznámka 3.2. Potom $df(z_0) := L$ je tzv. *totální diferenciál* f v z_0 a platí, že

$$df(z_0)h := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} h, \quad h \in \mathbb{R}^2,$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. (Tato matice se nazývá *Jacobiho matice*.)

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je v z_0 $\mathbb{C}$ -diferencovatelná, pokud existuje konečná limita

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Číslo $f'(z_0)$ nazýváme *komplexní derivací* f v z_0 .

Poznámka 3.4. Jako pro reálnou funkci reálné proměnné platí $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(f \cdot g)' = f'g + g'f$, $(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ a $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

Příklad 3.5.

- $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.
- $f(z) = \bar{z}$ není nikde v $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ -diferencovatelná, ale $f(x, y) = (x, -y)$ je všude $\mathbb{R}$ -diferencovatelná. Skutečně, pro $z_0 \in \mathbb{C}$ libovolné, máme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h},$$

avšak poslední limita neexistuje.

Věta 3.6 (Cauchy-Riemannova). *Nechť f je funkce definovaná na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. Existuje $f'(z_0)$
2. Existuje $df(z_0)$ a $df(z_0)$ je $\mathbb{C}$ -lineární
3. Existuje $df(z_0)$ a v z_0 platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0),\end{aligned}\tag{CR}$$

kde $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Důkaz. (2. $\iff$ 3.): Plyne z pozorování pro lineární zobrazení
(1. $\iff$ 2.) Podle definice $w = f'(z_0)$ znamená, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{h}.\tag{2}$$

Po vynásobení výrazu v limitě $h/|h|$ dostaneme, že

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{|h|},\tag{3}$$

což je ekvivalentní tomu, že $df(z_0)h = wh$, $h \in \mathbb{C}$. Z (3) plyne (2) vynásobením $|h|/h$. $\square$

Poznámka 3.7.

- Existuje-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h$, $h \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- Platí, že (CR) $\iff \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

Důkaz.

- $df(z_0)1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$
- zřejmé

$\square$

Příklad 3.8. Nechť $f(z) = \bar{z}$, pak $f(x, y) = (x, -y)$. Dále

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Máme, že $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ale v žádném $z \in \mathbb{C}$ nesplňuje (CR), proto není nikde $\mathbb{C}$ -diferencovatelná.

Definice 3.9. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Potom říkáme, že f je na G holomorfní, pokud f je $\mathbb{C}$ -diferencovatelná v každém $z_0 \in G$. Značíme $\mathcal{H}(G)$ prostor všech holomorfních funkcí $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Říkáme, že funkce F je celá, pokud $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Příklad 3.10.

- Polynom $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $z \in \mathbb{C}$ je celá funkce.
- Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a $Q \not\equiv 0$. Potom racionální funkce R je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$, kde $Q^{-1}(\{0\})$ je konečná množina.

4 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

4.1 Exponenciála

Definice 4.1. $\exp(z) := e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Vlastnosti 4.2.

- $\exp|_{\mathbb{R}}$ je reálná exponenciála
- $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \exp(z), \quad f_1(x, y) = e^x \cos y, \quad f_2(x, y) = e^x \sin y$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Tedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ a (CR) platí všude v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Z CR-věty a poznámky 3.7 máme $f'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $\exp$ není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$ -periodická a platí dokonce:
 $\exp(z) = \exp(w) \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = z + 2k\pi i$
- Necht' $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}$. Potom $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Poznámka 4.3. Necht' $z = x + iy$ je komplexní číslo, pak se na něj můžeme dívat jako na bod v rovině určený kartézskými souřadnicemi x a y . Polární (goniometrický) tvar komplexního čísla získáme tak, že si body x a y vyjádříme v polárních souřadnicích a ty pak dosadíme do rovnice udávající z . Tedy $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$, kde $r = |z|$ a φ je argument z . Polární souřadnice nám říkají, jak je daleko od počátku r a v jakém směru $\angle \varphi$ se bod z nachází.

Značení 4.4. Necht' $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom položíme $\operatorname{Arg}(z) := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\varphi}\}$. Je-li $\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$, potom $\arg(z) := \varphi_0$ je tzv. *hlavní hodnota argumentu* z .

Platí:

- $\operatorname{Arg}(z) := \{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- funkce $\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$, kde $\arg$ je surjektivní a navíc je konstantní na polopřímkách vycházejících z 0. Dále je $\arg$ spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ale není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$.

4.2 Logaritmus

Pro dané $z \in \mathbb{C}$ řešíme rovnici $e^w = z$.

- Pro $z = 0$ nemá rovnice řešení.
- Pro $z \neq 0$ je $z = |z|e^{i\arg(z)} = e^{\log|z| + i\arg(z)} = e^w \iff \exists k \in \mathbb{Z}: w = \log|z| + i\arg(z) + 2k\pi i$.

Definice 4.5. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme

- $\text{Log } z := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$
- $\log z := \log|z| + i \arg z$, tzv. *hlavní hodnota logaritmu* z .

Vlastnosti 4.6.

Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- $\text{Log } z = \{\log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a $\log = (\exp|_P)^{-1}$, kde P je množina z vlastností exponenciály.
- $\log$ není spojitá v žádném $z \in (-\infty, 0]$, ale $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$.
Navíc $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$

Pozor na počítání s komplexním logaritmem!

- $\exp(\log z) = z$, $\log(\exp z) \neq z$, z toho, že exponenciála je $2\pi i$ -periodická
- $\log(zw) \neq \log(z) + \log(w)$

např. $0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2\log(-1) = 2\pi i$

4.3 Obecná mocnina

Definice 4.7. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Potom *hlavní hodnotu α -té mocniny* z definujeme $z^\alpha := \exp(\alpha \log z)$. Položme $m_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w) \mid w \in \text{Log } z\}$.

Vlastnosti 4.8.

- $e^z = \exp(z \log e) = \exp(z)$
- Je-li $z > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je v souladu s definicí z MA.
- $m_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2k\pi i \alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$

Důkaz. $w \in \text{Log } z \iff w = \log z + 2k\pi i$

□

- $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$, kde $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Pozorování 4.9. Necht $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Necht $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $m_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$.
- Necht $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = p/q$, kde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom

$$m_{\frac{p}{q}}(z) = \left\{ z^{\frac{p}{q}} e^{\frac{2k\pi ip}{q}} : k \in \{0, 1, \dots, q-1\} \right\}$$

tvoří vrcholy pravidelného q -úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem $z^{\frac{p}{q}}$.

- Necht $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom je $m_\alpha(z)$ nekonečné.

Příklad 4.10.

- $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $m_{\frac{1}{2}}(-1) = \{\pm i\}$
- $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ (nesouhlasí s definicí z MA!), $m_{\frac{1}{3}}(-1) = \{e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{-\frac{\pi i}{3}}, -1\}$
- $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $m_i(i) = \{e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Pozor na počítání s mocninami!

- $(zw)^\alpha \neq z^\alpha w^\alpha$
např. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$

Poznámka 4.11. Je-li $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, potom $f(z) = \underbrace{\frac{f(z) + f(-z)}{2}}_{\text{sudá část}} + \underbrace{\frac{f(z) - f(-z)}{2}}_{\text{lichá část}}.$

4.4 Hyperbolické funkce

$e^z = \cosh(z) + \sinh(z)$, kde

Definice 4.12.

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.13.

- $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4.5 Goniometrické funkce

$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$, kde

Definice 4.14.

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}$$

Vlastnosti 4.15.

- $\cos$ a $\sin$ jsou rozšířením příslušných reálných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.
- $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$
- $\sin$ i $\cos$ jsou 2π -periodické, ale nejsou omezené na $\mathbb{C}$. Platí, že $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$
- i na $\mathbb{C}$ platí součtové vzorce, atd.
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

5 Křivkový integrál

Definice 5.1. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Potom

1. φ je *křivka*, pokud je φ spojitá
2. φ je *regulární křivka*, pokud je φ po částech spojitě diferencovatelná, tzn. φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a existuje dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ je spojitě diferencovatelné pro každé $i = 0, \dots, n-1$.

Definice 5.2 (Úsečka). Necht $a, b \in \mathbb{C}$. Potom $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $t \in [0, 1]$ je úsečka z a do b . Značíme $[a; b]$.

Značení 5.3. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou (regulární) křivky. Potom jejich *součet* je regulární křivka. $(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [\alpha, \beta] \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro } t \in [\beta, \delta + \beta - \gamma] \end{cases}$, pokud $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$.

Definice 5.4 (Lomenná čára). Řekneme, že regulární křivka φ je *lomenná čára* v $\mathbb{C}$, existují-li $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ taková, že $\varphi = [z_1; z_2] \dot{+} [z_2; z_3] \dot{+} \dots \dot{+} [z_{k-1}; z_k]$.

Definice 5.5 (Kružnice). Necht $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Potom $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je *kružnice* probíhaná v kladném směru (proti směru hodinových ručiček).

Poznámka 5.6. Pro křivku φ může být její graf $\langle \varphi \rangle := \varphi([\alpha, \beta])$ například čtverec (Peanova křivka).

Úmluva 5.7. Pokud neřekneme něco jiného, *křivkou* budeme rozumět *regulární křivku* v $\mathbb{C}$.

Připomenutí 5.8. Jako v MA definujeme

1. Vše po složkách, například:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t), \\ \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(t) dt, \end{aligned}$$

mají-li pravé strany smysl. Zde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$

2. *Délka křivky*:

$$V(\varphi) := \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt,$$

je-li φ regulární.

Definice 5.9. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je regulární křivka a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá. Potom definujeme

$$\int_{\varphi} f := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (1)$$

Poznámka 5.10.

1. Křivkový integrál (1) existuje vždy jako Riemannův.
2. Píšeme také $\int_{\varphi} f(z) dz$

Základní vlastnosti 5.11.

1. Je-li φ křivka, f a g jsou spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_{\varphi} (Af + Bg) = A \int_{\varphi} f + B \int_{\varphi} g.$$

2. Je-li φ křivka a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$, potom

$$\left| \int_{\varphi} f \right| \leq \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi).$$

Důkaz. Označíme $M := \max_{\langle\varphi\rangle} |f|$. Potom máme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} f \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))| |\varphi'(t)| dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} M |\varphi'(t)| dt = M \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = M \cdot V(\varphi) \end{aligned}$$

□

3. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{C}$ jsou křivky a $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$. Potom

$$\int_{\varphi \dot{+} \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f$$

a

$$\int_{\dot{-}\varphi} f = - \int_{\varphi} f,$$

kde $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-\beta, -\alpha]$ je *opačná křivka* k φ .

4. Křivkový integrál *nezávisí na parametrizaci křivky*. Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka, $\omega : [\gamma, \delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha, \beta]$ je spojitě diferencovatelné s $\omega' > 0$ a $\psi := \varphi \circ \omega$. Potom

$$\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f.$$

Důkaz.

$$\int_{\psi} f = \int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(\omega(t))) \varphi'(\omega(t)) \omega'(t) dt \stackrel{\text{subst.}}{\tau=\omega(t)} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\varphi} f.$$

□

Definice 5.12. Řekneme, že funkce f má na otevřené $G \subset \mathbb{C}$ *primitivní funkci* F , pokud $F' = f$ na G .

Příklad 5.13. $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ je primitivní funkcí k z^n

$$\begin{cases} \text{na } \mathbb{C} & \text{pro } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{na } \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } n = -2, -3, -4, \dots \end{cases}$$

Věta 5.14 (O výpočtu křivkového integrálu pomocí PF). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f má na G primitivní funkci F . Necht $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ je křivka a f je spojitá^(*) na $\langle\varphi\rangle$. Potom

1. $\int_{\varphi} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$
2. $\int_{\varphi} f = 0$, je-li φ uzavřená, tzn. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

Poznámka 5.15. (*) Ukážeme si později, že funkce f , která má na G primitivní funkci, je na G holomorfní, tudíž i spojitá.

Důkaz. Z Cauchy-Riemannovy věty plyne, že

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \frac{\partial F}{\partial x} \varphi'_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi'_2 = F' \varphi'_1 + i F' \varphi'_2 = F'(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Tato rovnost platí až na konečně mnoho $t \in [\alpha, \beta]$, neboli $F \circ \varphi$ je zobecněná primitivní funkce k integrandu. Máme tedy

$$\int_{\varphi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

Příklad 5.16.

- $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nemá primitivní funkci, neboť víme

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \text{ pro } \varphi(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

- $\frac{1}{z}$ má na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ primitivní funkci $\log(z)$.

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Připomenutí 5.17 (Souvislost). Necht $G \subset \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ otevřená. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (a) G je souvislá, tj. G je oblast.
- (b) G je křivkově souvislá, tzn. pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje spojitá křivka $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.
- (c) Pro každé $z_1, z_2 \in G$ existuje lomenná čára $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow G$ taková, že $\varphi(\alpha) = z_1$ a $\varphi(\beta) = z_2$.

Důkaz. (a) $\iff$ (b): víte z MA; (c) $\Rightarrow$ (b): jasné; (a) $\Rightarrow$ (c): ukáže se podobně jako (a) $\Rightarrow$ (b) □

Věta 5.18. Funkce f je konstantní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, právě když $f' = 0$ na G .

Důkaz. $\Rightarrow$ Jasně.

$\Leftarrow$ Necht $z, w \in G$ a φ je lomená čára v G spojující z a w . Potom $f(w) - f(z) = \int_{\varphi} f' = 0$, protože f je primitivní funkcí k f' na G . □

Důsledek 5.19. Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_2 = F_1 + c$.

Důkaz.

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

□

Věta 5.20 (O existenci primitivní funkce). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. f má na G primitivní funkci.
2. $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G .
3. $\int_{\varphi} f$ nezávisí v G na křivce φ , tzn. pro každé dvě křivky $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow G$, $\psi : [\gamma, \delta] \rightarrow G$ takové, že $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$, platí $\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.

Poznámka 5.21. Připomíná větu o potenciálu z MA (?)

Důkaz věty 5.20.

1. $\Rightarrow$ 2. Víme z věty o výpočtu integrálu pomocí primitivní funkce
2. $\Rightarrow$ 3. Položme $\tau := \varphi \dot{+} (\dot{-}\psi)$. Potom je τ uzavřená a z 2. dostaneme

$$0 = \int_{\tau} f = \int_{\varphi} f - \int_{\psi} f.$$

3. $\Rightarrow$ 1. Volme $z_0 \in G$ pevně. Pro každé $z \in G$ najdeme lomenou čáru φ_z v G , která začíná v z_0 a končí v z . Definujeme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, $z \in G$. Definice F je korektní, nezávislá na volbě φ_z , protože předpokládáme 3. Ukážeme, že F je hledaná PF k f na G . Necht $z_1 \in G$. Dokážeme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. Volme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$. Je-li $|h| < r$, potom

$$F(z_1 + h) - F(z_1) \stackrel{3.}{=} \int_{\varphi_{z_1} \dot{+} u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f,$$

kde $u = [z_1; z_1 + h]$ je úsečka, tzn. $u(t) = z_1 + t.h$, $t \in [0, 1]$. Tedy

$$F(z_1 + h) - F(z_1) = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th)h dt,$$

tudíž

$$\frac{F(z_1 + h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) = \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt.$$

To se blíží k nule pro $h \rightarrow 0$, protože

$$\left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) dt \right| \leq \max_{z \in [z_1; z_1 + h]} |f(z) - f(z_1)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ze spojitosti f v z_1 . Máme, že $F'(z_1) = f(z_1)$. □

Značení 5.22.

1. Řekneme, že $M \subset \mathbb{C}$ je *hvězdovitá*, pokud existuje $z_0 \in M$ (tzv. *střed hvězdovitosti*), pro který $[z_0; z] \subset M$ pro každé $z \in M$.

Poznámka. Konvexní $\subsetneq$ hvězdovitá.

2. Řekneme, že $\Delta \subset \mathbb{C}$ je *trojúhelník* s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud

$$\Delta := \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

(konvexní obal a, b, c) a značíme $\partial\Delta := [a; b] \dot{+} [b; c] \dot{+} [c; a]$. Připouštíme i degenerované Δ , tzn. a, b, c mohou ležet na jedné přímce nebo body a, b, c mohou splývat...

Dodatek 5.23. Necht f je spojitá funkce na hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Je-li

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad (2)$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$, potom f má na G primitivní funkci.

Důkaz. Necht z_0 je střed hvězdovitosti G , Pro každé $z \in G$ položíme $\varphi_z := [z_0; z]$ a $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. Rozmyslíme si, že důkaz $\boxed{F' = f \text{ na } G}$ je zcela analogický $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ předchozí věty, když místo $\textcircled{3}$ uvažujeme (2). $\square$

Poznámka 5.24. Cauchyho věta – Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a φ je uzavřená křivka v G . Potom Cauchyho věty nám říkají za jakých podmínek na G a φ je $\int_{\varphi} f = 0$.

Věta 5.25 (Goursatovo lemma – „Cauchyho věta pro Δ “). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(G)$ a Δ je trojúhelník v G . Potom

$$\int_{\partial\Delta} f = 0. \quad (3)$$

Důkaz. Označme $\varphi_0 := \partial\Delta$. Sporem: Předpokládejme, že $|\int_{\varphi_0} f| =: K > 0$. Zřejmě Δ je ne-degenerovaný. V Δ vedme střední příčky a označme $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ obvody čtyř vzniklých trojúhelníků (ψ_4 je obvod vnitřního trojúhelníka). Obvody vnitřních trojúhelníků ψ_1 (vlevo dole), ψ_2 (vpravo dole), ψ_3 (nahore) a ψ_4 (uprostřed) probíháme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\varphi_0} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f$. Ex. $j_1 = 1, \dots, 4$ tak, že $|\int_{\psi_{j_1}} f| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_1}) = \frac{V(\varphi)}{2}$. Označme $\varphi_1 = \psi_{j_1}$. Indukcí sestrojíme posloupnost (uzavřených) trojúhelníků, tž $\Delta\psi_{j_1}$ zase rozdělíme na 4 menší Δ -y středními příčkami a proces opakujeme. Pak $\Delta_0 := \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ s obvody $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ takové, že

$$\left| \int_{\varphi_j} f \right| \geq \frac{K}{4^j} \quad \text{a} \quad V(\varphi_j) = \frac{V(\varphi)}{2^j} \quad (a)$$

. Máme, že $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{z_0\} \subset G$, protože $\text{diam}(\Delta_j) \rightarrow 0$. Položíme

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0), & z \in G \setminus \{z_0\}; \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Potom ε je spojitá na G a máme pro $j \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{\varphi_j} f(z) dz = \int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) dz, \quad (b)$$

kde první integrand vpravo má PF na $\mathbb{C}$ a první integrál je roven 0. Pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ z (a), (b) dostaneme

$$0 < \frac{K}{4^j} \leq \left| \int_{\varphi_j} f \right| \stackrel{(b)}{=} \left| \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0) \right| \leq V^2(\varphi_j) \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon| \stackrel{(a)}{=} \frac{V^2(\varphi)}{4^j} \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon|,$$

kde třetí nerovnost platí díky tomu, že $|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$. Z předchozího tedy máme (po vynásobení 4^j): $0 < K \leq V^2(\varphi) \cdot \max_{\langle \varphi_j \rangle} |\varepsilon| \rightarrow 0$, protože ε je spojitá v z_0 a $\varepsilon(z_0) = 0$. Což je spor. $\square$

Věta 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má na G primitivní funkci. Ekvivalentně: platí, že $\int_{\varphi} f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v G .*

Důkaz. Z Goursatova lemmatu a dodatku k větě o existenci primitivní funkce (Dodatek 5.23). $\square$

Poznámka 5.27. Goursatovo lemma a tedy i předchozí věta platí i pro funkci f , která je spojitá na G a holomorfní na $G \setminus \{z_0\}$ pro nějaké $z_0 \in G$.

Důkaz. Nechť Δ je nedegenerovaný trojúhelník v G . Rozlišujeme případy:

1. Nechť $z_0 \notin \Delta$. Potom $\int_{\partial\Delta} f = 0$ dle Goursatova lemmatu.
2. Nechť z_0 je vrchol Δ . Nechť Δ_ε je trojúhelník podobný s Δ , $\Delta_\varepsilon \subset \Delta$ a z_0 je jeho vrcholem. Nechť poměr stran Δ ku Δ_ε je roven ε . Δ' , Δ'' jsou trojúhelníky vzniklé rozdělením Δ na tři trojúhelníky $(\Delta_\varepsilon, \Delta', \Delta'')$. Obvody vzniklých vnitřních trojúhelníků procházíme proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f + \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f$, kde poslední dva integrály jsou rovny 0 podle bodu 1. Tudíž $|\int_{\partial\Delta} f| = |\int_{\partial\Delta_\varepsilon} f| \leq \varepsilon \cdot V(\partial\Delta) \cdot \max_{\Delta} |f| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$. Tedy $\int_{\partial\Delta} f = 0$.
3. Nechť z_0 leží uvnitř strany Δ . Potom Δ rozřízneme na dva menší trojúhelníky Δ' a Δ'' se společným vrcholem v z_0 . Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f$, kde oba integrály na pravé straně jsou rovny 0 podle bodu 2. Tudíž $\int_{\partial\Delta} f = 0$.
4. Nechť z_0 leží uvnitř Δ . Potom Δ rozřízneme na tři menší trojúhelníky Δ' a Δ'' , Δ''' se společným vrcholem v z_0 . Jejich obvody procházím proti směru hodinových ručiček. Potom $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta'} f + \int_{\partial\Delta''} f + \int_{\partial\Delta'''} f$, kde jsou všechny tři integrály na pravé straně rovny 0 podle bodu 2. Tudíž $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

$\square$

Věta 5.28 (O derivování podle komplexního parametru). *Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Nechť $F(z, s)$ a komplexní derivace $\frac{\partial F}{\partial s}(z, s)$ jsou spojitě komplexní funkce na $\langle \varphi \rangle \times \Omega$. Pro každé $s \in \Omega$ položíme $\phi(s) := \int_{\varphi} F(z, s) dz$. Potom $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $\phi'(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s}(z, s) dz$, $s \in \Omega$.*

Důkaz. Pro $s = s_1 + is_2 = (s_1, s_2) \in \Omega$ máme $\phi(s) = \int_{\alpha}^{\beta} F(\varphi(t), (s_1, s_2)) \varphi'(t) dt$, pokud $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Podle vět o spojitosti a derivování integrálu závislého na reálných parametrech máme $\frac{\partial \phi}{\partial s_j}(s) = \int_{\varphi} \frac{\partial F}{\partial s_j}(z, s) dz$, pro $s \in \Omega$ a $j = 1, 2$. Navíc jsou tyto parciální derivace spojitě a splňují (CR)-podmínky. To je vidět z toho, že $\frac{\partial F}{\partial s_j}(z, s)$, $j = 1, 2$ jsou spojitě a splňují (CR)-podmínky. Z (CR) dostaneme, že funkce ϕ je komplexně diferencovatelná a komplexní derivace se rovná derivaci vzhledem k té první proměnné. Odtud plyne věta. $\square$

Definice 5.29. Nechť je φ uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom číslo

$$\text{ind}_{\varphi} s := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z - s}$$

nazveme *indexem bodu s vzhledem ke křivce φ*

Poznámka 5.30. Ukážeme si, že $\text{ind}_{\varphi} s$ se rovná počtu oběhů φ kolem s v kladném směru (tzn. proti směru hodinových ručiček).

Věta 5.31 (o základních vlastnostech indexu). *Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $G := \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Potom je G otevřená, funkce $s \mapsto \text{ind}_{\varphi} s$ je konstantní na každé komponentě G a na jediné její neomezené komponentě je nulová.*

Důkaz. (i) Podle předchozí věty je $\phi(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}$, $s \in G$ holomorfní a pro každé $s \in G$ je $\phi'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^2} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má PF na $\mathbb{C} \setminus \{s\}$. Tedy ϕ je konstantní na každé komponentě G .

(ii) Volíme $R > 0$, aby $\langle \varphi \rangle \subset U(0, R)$. Potom $\mathbb{C} \setminus U(0, R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G . Navíc pro $s \in \mathbb{C} \setminus U(0, R)$ je funkce $g(z) := \frac{1}{z-s}$, $z \in U(0, R)$ holomorfní a dle Cauchyho věty pro hvězdovitou oblast je $\phi(s) = 0$

□

Příklad 5.32. Necht $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\varphi(t) := z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom

$$\text{ind}_{\varphi} s = \begin{cases} 0 & \text{pro } |s - z_0| < r, \\ 1 & \text{pro } |s - z_0| > r. \end{cases}$$

Spočetli jsme, že $\text{ind}_{\varphi} z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-z_0} = 1$. Zbytek plyne z předchozí věty.

Věta 5.33 (Cauchyův vzorec pro kruh). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Necht $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a $\varphi(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (*). Potom platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz = \begin{cases} f(s), & |s - z_0| < r \\ 0, & |s - z_0| > r \end{cases} \quad (CV_z)$$

Důkaz. Existuje $R > r$ tak, že $U(z_0, R) \subset G$.

(i) Necht $|s - z_0| < r$. Definujme

$$h(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s}, & z \neq s \text{ a } z \in G \\ f'(s), & z = s. \end{cases}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(U(z_0, R) \setminus \{s\})$ a spojitá na hvězdovité oblasti $U(z_0, R)$. Potom z Cauchyho věty

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz - f(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{dz}{z-s}}_{=\text{ind}_{\varphi} s = 1}$$

(ii) Necht $|s - z_0| > r$. Volme $R' \in (r, |s - z_0|)$, aby $U(z_0, R') \subset G$. Potom $f(z)/(z-s)$ je holomorfní funkce na $U(z_0, R')$ a z Cauchyho věty je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-s} dz = 0.$$

□

Důsledek 5.34. Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom f má komplexní derivaci všech řádů všude na G . Necht $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a φ je jako v (*). Potom

$$f^{(k)}(s) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}} dz, \quad |s - z_0| < r \text{ a } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (CV_z^{(k)})$$

Zde $f^{(0)} = f$ a k -tá komplexní derivace $f^{(k)}$ je definovaná jako $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Z věty o derivaci integrálu dle komplexního parametru a (CV_z) , protože

$$\frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{z-s} \right) = \frac{k!}{(z-s)^{k+1}}, \quad z \neq s.$$

□

Věta 5.35 (Morera). *Nechť f je spojitá funkce na otevřené $G \subset \mathbb{C}$. Potom $f \in \mathcal{H}(G)$, právě když*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0 \quad \text{pro každý trojúhelník } \Delta \subset G. \quad (4)$$

Důkaz. " $\Rightarrow$ ": Goursatovo lemma

" $\Leftarrow$ ": Nechť $\mathcal{U} := U(z_0, R)$ je libovolný kruh v G . Protože f je spojitá na $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ je hvězdovitá oblast a

$$\int_{\partial\Delta} f = 0$$

pro každý trojúhelník $\Delta \subset \mathcal{U}$, má f na $\mathcal{U}$ primitivní funkci F , to znamená, že $f = F'$ na $\mathcal{U}$. Protože $F \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, máme $f' = F''$ na $\mathcal{U}$, tudíž f je holomorfní na $\mathcal{U}$. Protože $\mathcal{U}$ byl libovolný kruh v G , je $f \in \mathcal{H}(G)$. $\square$

Věta 5.36 (Cauchyho odhady). *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$ a f je holomorfní funkce na otevřené množině obsahující $\overline{U(z_0, r)}$. Potom pro každé $k = 0, 1, 2, \dots$ je*

$$\forall s \in \mathcal{U} := U(z_0, r) : \quad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{r \cdot k!}{(d(s))^{k+1}} \cdot \max_{\partial\mathcal{U}} |f|, \quad (CO_1)$$

kde $d(s) := \text{dist}(s, \partial\mathcal{U}) \stackrel{\text{def.}}{=} \min_{z \in \partial\mathcal{U}} |s - z|$

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right) : \quad |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k! \cdot 2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial\mathcal{U}} |f|. \quad (CO_2)$$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \cdot \max_{\partial\mathcal{U}} |f|. \quad (CO_3)$$

Důkaz. (CO_1) dostaneme z $(CV_z^{(k)})$, protože

$$|f^{(k)}(s)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-s)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{(d(s))^{k+1}} \cdot \max_{\partial\mathcal{U}} |f|$$

a $|z-s| \geq d(s)$, $z \in \partial\mathcal{U} = \langle \varphi \rangle$, zde $\varphi(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(CO_2) plyne z (CO_1) , protože $d(s) \geq \frac{r}{2} \quad \forall s \in U(z_0, r/2)$.

(CO_3) plyne z (CO_1) , protože $d(z_0) = r$. $\square$

Věta 5.37 (Liouville). *Je-li f holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, potom je f konstantní.*

Důkaz. Ukážeme, že $f' = 0$ na $\mathbb{C}$. Označme $M := \sup_{\mathbb{C}} |f| < +\infty$. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Z (CO_3) dostaneme pro každé $r > 0$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \max_{\partial U(z_0, r)} |f| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0,$$

tudíž $f'(z_0) = 0$. $\square$

Důsledek 5.38 (Základní věta algebry). *V $\mathbb{C}$ má polynom stupně aspoň 1 vždy aspoň jeden kořen.*

Důkaz. Nechť $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, kde $a_j \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ a $n \geq 1$.

Sporem: Předpokládejme, že $p \neq 0$ na $\mathbb{C}$. Položme $f := 1/p$. Potom f je holomorfní a omezená na $\mathbb{C}$, tudíž dle Liouvilleovy věty je f i p konstantní. Tedy $p' = 0$ a $0 = p^{(n)} = n!a_0$, což je spor. Omezenost f : Máme

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}\right)} \right| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{|a_0| - \frac{|a_1|}{r} - \dots - \frac{|a_n|}{r^n}} \rightarrow 0$$

pro $r = |z| \rightarrow +\infty$.

Existuje $r_0 \in (0, +\infty)$ tak, že $|f(z)| \leq 1$, je-li $|z| > r_0$. Funkce f je omezená na $\overline{U(0, r_0)}$, protože je tam spojitá. $\square$

Lemma 5.39. *Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$, f_n jsou spojité funkce na $\langle \varphi \rangle$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle \varphi \rangle$. Potom f je spojitá na $\langle \varphi \rangle$ a*

$$\int_{\varphi} f_n \rightarrow \int_{\varphi} f.$$

Důkaz. Máme

$$0 \leq \left| \int_{\varphi} f_n - \int_{\varphi} f \right| = \left| \int_{\varphi} (f_n - f) \right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{\langle \varphi \rangle} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$\square$

Věta 5.40 (Weierstrass). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f_n \in \mathcal{H}(G)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \xrightarrow{loc} f$ na G . Potom $f \in \mathcal{H}(G)$ a $f_n^{(k)} \xrightarrow{loc} f^{(k)}$ na G pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. ① Zřejmě je f spojitá. Nechť Δ je trojúhelník v G . Potom

$$0 = \int_{\partial \Delta} f_n \xrightarrow{\text{Lemma}} \int_{\partial \Delta} f = 0$$

Z Morerovy věty je $f \in \mathcal{H}(G)$.

② Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Volme $r > 0$, aby $\overline{U(z_0, r)} \subset G$. Potom z (CO₂) máme:

$$\forall s \in U\left(z_0, \frac{r}{2}\right): \quad |f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| = |(f_n - f)^{(k)}(s)| \leq \frac{k! \cdot 2^{k+1}}{r^k} \cdot \max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\square$

6 Mocninné řady

Definice 6.1. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

je mocninná řada o středu z_0 s koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Vlastnosti 6.2.

① **Konvergence** (na cvičení)

Existuje jediné $R \in [0, +\infty]$ takové, že

- řada (1) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$,
- řada (1) diverguje pro $|z - z_0| > R$.

Číslo R se nazývá poloměr konvergence (1) a platí, že

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde položíme $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.

② Označíme-li součet (1) na $U(z_0, R)$ jako f , potom je $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall z \in U(z_0, R) : \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) (z-z_0)^{n-k},$$

speciálně $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Poznámka 6.3. Mocninnou řadu derivujeme "člen po členu", můžeme na $U(z_0, r)$ zaměnit sumu a komplexní derivaci.

Důkaz. Užijeme Weierstrassovu větu na

$$S_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n (z-z_0)^n, \quad z \in U(z_0, R)$$

Dosadíme-li do (1) $z = z_0$, máme $f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!$ □

Věta 6.4 (O rozvoji holomorfní funkce na kruhu do mocninné řady). *Nechť $R \in (0, +\infty]$ a $f \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$. Potom existuje jediná mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, která má na $U(z_0, R)$ součet f . Navíc platí, že $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Důkaz. 1. jednoznačnost: Zřejmě z toho, že $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

2. existence: Nechť $z \in U(z_0, R)$. Volme $r > 0$, aby $|z-z_0| < r < R$. Potom z (CV_z) je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw, \tag{a}$$

kde $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Pro každé $w \in \langle \varphi \rangle$ máme

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}. \tag{b}$$

Kde $|\frac{z-z_0}{w-z_0}| < 1$ a suma konverguje stejnoměrně pro $w \in \langle \varphi \rangle$. Dosadíme (a) do (b). Potom

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \end{aligned}$$

z $(CV_z^{(k)})$. □

Příklad 6.5. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$, protože $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ a $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$.

Věta 6.6 (O nulovém bodě). *Nechť f je holomorfní funkce na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď*

1. *existuje $r > 0$, že $f = 0$ na $U(z_0, r)$, nebo*
2. *existuje $r > 0$, že $f \neq 0$ na $P(z_0, r) := U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.*

V případě 2. existuje jediné $p \in \mathbb{N}$ takové, že

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0. \quad (2)$$

Číslo p nazýváme násobnost nulového bodu z_0 funkce f .

Poznámka 6.7. Navíc z_0 je nulový bod f násobnosti p , právě když existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0, r))$ tak, že $\forall z \in U(z_0, r)$:

$$g(z) \neq 0 \quad \text{a} \quad f(z) = (z - z_0)^p g(z). \quad (3)$$

Důkaz. Máme, že $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in U(z_0, r)$. Pokud nenastane 1., potom existuje $n \in \mathbb{N}$, že $0 \neq a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Zvolme nejmenší $p \in \mathbb{N}$, aby $a_p \neq 0$. Potom platí (2) a

$$\forall z \in U(z_0, r) : f(z) = a_p (z - z_0)^p + \dots = (z - z_0)^p \cdot \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-p}}_{:= g(z)}. \quad (4)$$

Dále $g(z)$ definujeme jako poslední sumu. Protože $g(z_0) = a_p \neq 0$, existuje $r > 0$, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a $f(z) = (z - z_0)^p g(z) \neq 0$ na $P(z_0, r)$. Obrácené tvrzení z poznámky je snadné. $\square$

Věta 6.8 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce). *Nechť $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f, g \in \mathcal{H}(G)$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *$f = g$ na G ;*
2. *množina $M := \{z \in G : f(z) = g(z)\}$ má v G hromadný bod, tj. existuje $z_0 \in G$ takový, že $\forall r > 0 : M \cap P(z_0, r) \neq \emptyset$*
3. *existuje $z_0 \in G$, že $\forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $g \equiv 0$ na G (jinak uvažme $f - g$).

1 $\Rightarrow$ 2: triviální, 2 $\Rightarrow$ 3: Nechť $z_0 \in G$ je hromadný bod $M := \{z \in G : f(z) = 0\}$. Z věty o nulovém bodě je $f = 0$ na nějakém okolí z_0 , tudíž platí 3.

3 $\Rightarrow$ 1: Nechť $N := \{z \in G : \forall k \in \mathbb{N}_0 : f^{(k)}(z) = 0\}$. Potom $\emptyset \neq N$, N je uzavřená v G , protože všechny $f^{(k)}$ jsou spojité. Navíc N je otevřená. Nechť $z_1 \in N$. Podle věty o nulovém bodě existuje $r > 0$, že $f = 0$ na $U(z_1, r)$. Tedy $U(z_1, r) \subset N$. Protože G je oblast, dostaneme $N = G$ a speciálně 1. $\square$

Příklad 6.9. Vzoreček $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$, $z \in \mathbb{C}$ dostaneme z věty o jednoznačnosti, protože obě strany rovnosti jsou celé funkce a víme, že rovnost platí na $\mathbb{R}$ (tzn. platí 2).

Poznámka 6.10. Podobně lze řadu vzorečků bez počítání zobecnit z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$!

Věta 6.11 (Princip maxima modulu). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f \in \mathcal{H}(G)$. Potom je f konstantní na G , pokud $|f|$ nabývá na G lokální maximum, tzn. existuje $z_0 \in G$ a $r > 0$ tak, že*

$$\forall z \in U(z_0, r) \subset G : |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad (5)$$

Důkaz. Necht platí (5). Potom $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $z \in U(z_0, r)$. Pro $0 < \rho < r$ platí, že

$$\begin{aligned} |a_0|^2 &= |f(z_0)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{int} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} \rho^m e^{-imt} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \cdot \overline{a_m} \rho^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}, \end{aligned} \quad (6)$$

neboť

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(n-m)} dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m, \\ 1 & \text{pro } n = m. \end{cases}$$

Nebo-li $|a_0|^2 \geq |a_0|^2 + |a_1|^2 \rho^2 + \dots$, tudíž $0 = a_1 = a_2 = \dots$. Dostáváme, že $f = a_0$ na $U(z_0, r)$ a z věty o jednoznačnosti $f = a_0$ na G . $\square$

7 Riemannova sféra

Rozšíříme $\mathbb{C}$ o *nekonečno*. Položíme $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin \mathbb{C}$, a pro $\varepsilon > 0$ zavedeme *okolí* kolem ∞ následovně $P(\infty, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$, $U(\infty, \varepsilon) := P(\infty, \varepsilon) \cup \{\infty\}$.

Definice 7.1. Řekneme, že $z_n \rightarrow z_0$ v $\mathbb{S}$, pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : z_n \in U(z_0, \varepsilon)$.

Poznámka 7.2. Z definice plyne:

- $z_n \rightarrow z_0$ v $\mathbb{S}$ a $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z_n \rightarrow z_0$ v $\mathbb{C}$.
- $z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |z_n| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \rightarrow 0$. Zde $\frac{1}{\infty} := 0$ a $|\infty| := +\infty$.

Poznámka 7.3. $\mathbb{S}$ je jednobodová kompaktifikace topologického prostoru $\mathbb{C}$.

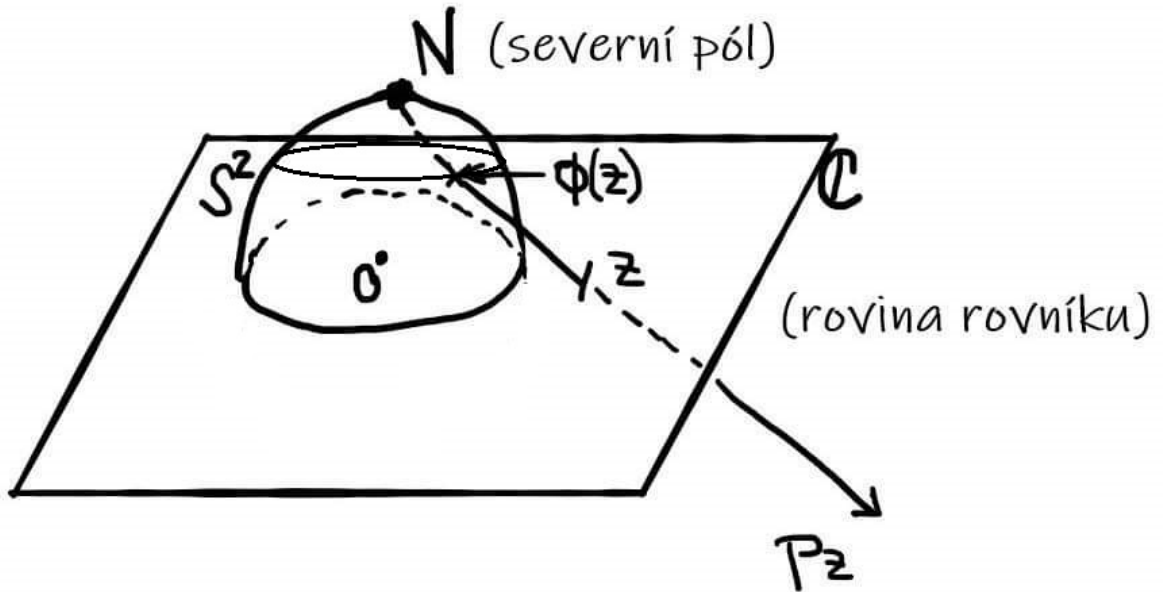
Vlastnosti 7.4.

Na $\mathbb{S}$ zavedeme metriku ϱ (není jediná), tž.

$$(z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \text{ v } \mathbb{S}) \Leftrightarrow \varrho(z_n, z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (*)$$

Navíc $(\mathbb{S}, \varrho)$ bude *izometrický* s jednotkovou sférou $S^2 := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$, kterou chápeme jako metrický podprostor $\mathbb{R}^3$. Speciálně $(\mathbb{S}, \varrho)$ je *kompaktní*.

- Definujeme *stereografickou projekci* $\phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ jako na obrázku, kde $N = (0, 0, 1)$.



Položme $\phi(\infty) := N$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $\{\phi(z)\} = (S \setminus \{N\}) \cap p_z$, kde p_z je polopřímka z N procházející bodem $z \in \mathbb{C}$. Potom $\phi : \mathbb{S} \xrightarrow{na} S^2$ je bijekce.

Cvičení 7.5.

- $\phi(z) := \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
- $\phi^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) := \left(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma} \right)$, pro $(\alpha, \beta, \gamma) \in S^2 \setminus \{N\}$
- Položme $\varrho(z, w) := |\phi(z) - \phi(w)|$, $z, w \in \mathbb{S}$, kde $|\cdot|_S$ je eukleidovská norma v $\mathbb{R}^3$. Potom ϕ je izometrie $(\mathbb{S}, \varrho)$ na S^2 .
- Platí (*). Skutečně, z předchozího bodu a z cvičení máme: $\varrho(z_n, z_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi(z_n) \rightarrow \phi(z_0) \Leftrightarrow z_n \rightarrow z_0$ v $\mathbb{S}$, protože ϕ i ϕ^{-1} jsou spojité.
- Nechť $z_n \in \mathbb{C}$ a $z_n \rightarrow \infty$. Potom $|z_n| \rightarrow +\infty$, $\phi(z_n) \in S^2$, proto $\phi_3(z_n) \rightarrow 1$. Odtud $\phi(z_n) \rightarrow N := (0, 0, 1)$
- Nechť $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in S^2 \setminus \{N\}$ a $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N$. Potom $|\phi^{-1}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)|^2 = \frac{1-\gamma_n^2}{(1-\gamma_n)^2} = \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n} \rightarrow +\infty$. Tudíž $\phi^{-1}(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \rightarrow \infty$.

Definice 7.6. Nechť $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ a $z_0, L \in \mathbb{S}$. Potom $L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, pokud pro každou $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{S}$, $z_0 \neq z_n$ platí $z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow L$.

Poznámka 7.7. Platí:

1. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f(1/z)$, má-li alespoň jedna strana smysl.
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \rightarrow z_0} 1/f(z) = 0$.

Věta 7.8 (Aritmetika limit v $\mathbb{S}$). Platí:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}, \end{aligned}$$

mají-li pravé strany smysl, pokud definujeme $\forall a \in \mathbb{C} : a/\infty = 0, \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\} : a/0 = \infty, \forall a \in \mathbb{C} : a \pm \infty = \infty, \forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\} : a \cdot \infty = \infty$.

Nedefinujeme: $0/0, \infty/\infty, \infty \pm \infty, 0 \cdot \infty$.

Příklad 7.9. Racionální funkce lze chápat jako spojité funkce z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$. Skutečně, nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, $Q \neq 0$ a P, Q nemají stejné kořeny.

1. Nechť $Q(z_0) = 0$. Potom $P(z_0) \neq 0$ a $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = \infty$. Položme $R(z_0) := \infty$.
2. Pokud $R \not\equiv 0$, potom

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_0 z^n + \dots + a_n}^{\neq 0}}{\underbrace{b_0 z^m + \dots + b_m}_{\neq 0}} = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{n-m} \left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_m}{z^m}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{pro } n = m, \\ \infty & \text{pro } n > m. \end{cases}$$

Položme $R(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} R(z)$.

7.1 Izolované singularity

Definice 7.10. Necht f je holomorfní funkce na $P(z_0)$, ale není holomorfní na $U(z_0)$. Potom f má v z_0

1. *odstranitelnou singularity*, existuje-li $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$,
2. *pól*, je-li $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$,
3. *podstatnou singularity*, pokud $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ neexistuje.

Příklad 7.11.

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z} &\text{ má v } 0 \text{ odstranitelnou singularity,} \\ \frac{1}{z^{10}} &\text{ má v } 0 \text{ pól,} \\ e^{1/z} &\text{ má v } 0 \text{ podstatnou singularity.}\end{aligned}$$

Věta 7.12 (O odstranitelné singularetě). Necht f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. z_0 je odstranitelná singularity f ,
2. existuje $r > 0$ tak, že f je omezená na $P(z_0, r)$,
3. existuje $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $F = f$ na $P(z_0)$.

Úmluva 7.13. Odstranitelná singularity je vždy odstraněna ve smyslu (3). Dodefinujeme f v z_0 holomorfně.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): triviální, (2) $\Rightarrow$ (3): Položme

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{pro } z \in P(z_0), \\ 0 & \text{pro } z = z_0. \end{cases}$$

Potom $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$, protože

$$g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{(z - z_0)}_{\rightarrow 0} \underbrace{f(z)}_{\text{omez.}} = 0.$$

Navíc pro každé $z \in U(z_0)$ je

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 F(z),$$

kde

$$F(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}, \quad z \in U(z_0).$$

Zřejmě $F \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $F = f$ na $P(z_0)$. (3) $\Rightarrow$ (1): jasné. □

Věta 7.14 (O pólu). Necht f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. z_0 je pól f ,

2. $h := \frac{1}{f}$ a $h(z_0) := 0$ má v z_0 nulový bod násobnosti p pro nějaké $p \in \mathbb{N}$,

3. existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

4. existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \begin{cases} \infty & \text{pro } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } k = p, \\ 0 & \text{pro } k > p. \end{cases}$$

Číslo p z $\textcircled{2} - \textcircled{4}$ je určeno jednoznačně a nazývá se násobnost pólu z_0 funkce f .

Poznámka 7.15. Píšeme $f(z) \sim g(z)$ pro $z \rightarrow z_0$, je-li $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Potom $\textcircled{3} \iff f(z) \sim \frac{1}{(z - z_0)^p}$, pro $z \rightarrow z_0$.

Důkaz. $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$ Protože $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, je $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Po odstranění odstranitelné singularity má $1/f$ v z_0 nulový bod konečné násobnosti $p \in \mathbb{N}$.

$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$ Existuje $r > 0$ a $g \in \mathcal{H}(U(z_0))$ tak, že $g \neq 0$ na $U(z_0, r)$ a $h(z) = (z - z_0)^p g(z)$, $z \in U(z_0, r)$. Potom

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p \underbrace{f(z)}_{= \frac{1}{h(z)}} = \frac{1}{g(z_0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{4}$ Máme

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k-p} \underbrace{(z - z_0)^p f(z)}_{\in \mathbb{C} \setminus \{0\}} = \begin{cases} \infty & \text{pro } k < p, \\ \in \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{pro } k = p, \\ 0 & \text{pro } k > p. \end{cases}$$

$\textcircled{4} \Rightarrow \textcircled{1}$ Položíme $k = 0$. □

Věta 7.16 (Casorati-Weierstrass). Necht f je holomorfní funkce na $P(z_0)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. z_0 je podstatná singularita f ,

2. $\forall r > 0 : \overline{f(P(z_0, r))} = \mathbb{C}$.

Poznámka 7.17 (Velká Picardova věta). $\textcircled{1} \iff \textcircled{3}$

3. $\forall r > 0 : \mathbb{C} \setminus f(P(z_0, r))$ je nejvýše jednobodová [hluboká věta, důkaz nebude].

Příklad 7.18. $\exp(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\exp(1/z)$ má v 0 podstatnou singularitu.

Důkaz. $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1}$ Jasně z definice limity.

$\neg \textcircled{2} \Rightarrow \neg \textcircled{1}$ Předpokládejme, že existuje $r > 0$ tak, že $\mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0, r))} \neq \emptyset$ a $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r))$. Potom existuje $U(u_0, \beta) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0, r))}$, speciálně máme, že $0 < |z - z_0| < r \Rightarrow |f(z) - u_0| \geq \beta$. Definujeme

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - u_0}, \quad z \in P(z_0, r). \quad (*)$$

Potom je g holomorfní a $|g| \leq \frac{1}{\beta}$ na $P(z_0, r)$. Tedy z_0 je odstranitelná singularita a existuje $L := \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \in \mathbb{C}$. Potom máme

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \stackrel{(*)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(u_0 + \frac{1}{g(z)} \right) = \begin{cases} \infty & \text{pro } L = 0, \\ \in \mathbb{C} & \text{pro } L \neq 0. \end{cases}$$

Tedy f má v z_0 buď odstranitelnou singularitu anebo pól. □

7.2 Laurentovy řady

Definice 7.19. Necht $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(L)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{(H)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(R)} \quad (1)$$

je *Laurentova řada* s koeficienty a_n a středem z_0 . Řada (R) je *regulární část* (L) a řada (H) je *hlavní část* (L) . Řekneme, že (L) konverguje, pokud obě její části, tj. (H) i (R) , konvergují.

Příklad 7.20.

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

Vlastnosti 7.21 (L).

① *Konvergence:* Existují *jediná* $R, r \in [0, +\infty]$ tak, že

1. řada (R) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| < R$ a diverguje na $|z - z_0| > R$,
2. řada (H) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $|z - z_0| > r$ a diverguje na $|z - z_0| < r$.

② *Součet:* Necht $0 \leq r < R \leq +\infty$ (toto ne vždy platí: může se stát, že řada nekonverguje). Položme *mezikružší* $P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Označíme-li součet (L) jako f , potom na $P(z_0, r, R)$ je f holomorfní, řadu (L) tam derivujeme "člen po členu", atd.

Poznámka 7.22. Platí $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$.

Důkaz. ① Číslo R je poloměr konvergence mocninné řady (R) . Pro $w = \frac{1}{z-z_0}$ je řada (H) rovna mocninné řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n. \quad (*)$$

Číslo $\frac{1}{r}$ je poloměr konvergence $(*)$.

② Plyne opět z Weierstrassovy věty. □

Cíl Ukážeme, že $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r, R))$, právě když existuje *jediné* (L) , které má na $P(z_0, r, R)$ součet f .

7.3 Holomorfní funkce na mezikružší

Lemma 7.23. Necht f je holomorfní funkce na $P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, kde $0 \leq r < R \leq +\infty$. Pro každé $\rho \in (r, R)$ označme

$$\varphi_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}, \text{ pro } t \in [0, 2\pi] \quad (\Delta)$$

a $J(\rho) = \int_{\varphi_\rho} f$. Potom je J konstantní na (r, R) .

Důkaz. Bez újmy na obecnosti necht $z_0 = 0$. Necht $\rho \in (r, R)$. Potom máme

$$J(\rho) = i \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \rho e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} g(\rho e^{it}) dt,$$

kde $g(z) := f(z) \cdot z$, $z \in P := P(0, r, R)$. Dále

$$J'(\rho) = \frac{i}{\rho} \int_0^{2\pi} g'(\rho e^{it}) \rho e^{it} dt = \frac{1}{\rho} \int_{\varphi_\rho} g' = 0, \quad (\times)$$

protože g' má PF g na P . Platí $(\times)$, protože

$$\frac{d}{d\rho} \left(g(\rho e^{it}) \right) = \frac{dg}{dx} \cos t + \frac{dg}{dy} \sin t \stackrel{\text{CR v\u011bta}}{=} g' \cos t + i g' \sin t = g'(\rho e^{it}) e^{it}.$$

□

V\u011bta 7.24 (Cauchyho vzorec na mezikru\u017b\u00ed). *Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$, kde $P := P(z_0, r, R)$. Nechť $r < r_0 < R_0 < R$ a $s \in P(z_0, r_0, R_0)$. Potom plat\u00ed*

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)}{z-s} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)}{z-s} dz, \quad (\square)$$

kde φ_ρ je jako v (Δ) .

D\u00falaz. Pro $z \in P$ polo\u017eme

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s} & \text{pro } z \neq s, \\ f'(s) & \text{pro } z = s. \end{cases}$$

Potom $h \in \mathcal{H}(P)$, protože h má „odstran\u011bnou“ singularitu v s . Podle lemmatu m\u00e1me

$$\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z) dz}{z-s} - f(s) \int_{\varphi_{R_0}} \frac{dz}{z-s}, \text{ kde posledn\u00ed integr\u00e1l je roven } 2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi_{R_0}} s = 2\pi i,$$

$$\int_{\varphi_{r_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z) dz}{z-s} - f(s) \int_{\varphi_{r_0}} \frac{dz}{z-s}, \text{ kde posledn\u00ed integr\u00e1l je roven } 2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi_{r_0}} s = 0.$$

D\u00e1le $\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} h$, tud\u00ed\u017e plat\u00ed $(\square)$. □

V\u011bta 7.25 (O Laurentov\u011b rozvoji holomorfn\u00ed funkce na mezikru\u017b\u00ed). *Nechť $P := P(z_0, r, R)$, kde $0 \leq r < R \leq +\infty$. Nechť $f \in \mathcal{H}(P)$. Potom existuje jedn\u00e1 Laurentova \u0159ada*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad (\text{L})$$

kter\u00e1 m\u00e1 na P sou\u010et f .

D\u00falaz. 1. jednozna\u010dnost: Nechť plat\u00ed $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in P$. Je-li $\rho \in (r, R)$ a $m \in \mathbb{Z}$, pak

$$\int_{\varphi_\rho} f(z) (z-z_0)^{-(m+1)} dz = \int_{\varphi_\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\varphi_\rho} (z-z_0)^{n-m-1} dz =$$

$= 2\pi i \cdot a_m$, kde v druhé rovnosti suma konverguje stejnom\u011brn\u011b na $\langle \varphi_\rho \rangle$ a posledn\u00ed integr\u00e1l je roven 0 pro $n \neq m$ a $2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi_\rho} z_0 = 2\pi i$ pro $n = m$.

Z\u00e1v\u011br: koeficienty (L) se d\u00e1j\u00ed vyj\u00e1d\u0159it pomocí sou\u010tu f jako

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (**)$$

kde φ_ρ je jako v (Δ) . Podle lemmatu integrandy nezávis\u00ed na $\rho \in (r, R)$.

2. existence: Necht $s \in P$. Volme $r < r_0 < R_0 < R$, aby $s \in P(z_0, r_0, R_0)$. Potom z Cauchyho vzorce máme

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z) dz}{z-s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z) dz}{z-s}, \quad (a)$$

$$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad (b)$$

neboť $\left| \frac{s-z_0}{z-z_0} \right| < 1$, tedy řada konverguje stejnoměrně pro $z \in \langle \varphi_{R_0} \rangle$;

$$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{(-1)}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}, \quad (c)$$

neboť $\left| \frac{z-z_0}{s-z_0} \right| < 1$, tedy řada konverguje stejnoměrně pro $z \in \langle \varphi_{r_0} \rangle$. Dosadíme (b), (c) do (a) a dostaneme

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} f(z) dz \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^n \cdot a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} (s-z_0)^{-n-1} \cdot a_{-(n+1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

kde a_n jsou jako v (**).

□

7.4 Izolované singularity 2

Věta 7.26 (O Laurentově rozvoji kolem izolované singularity). Necht $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r))$

a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in P(z_0, r)$. Potom

1. f má v z_0 odstranitelnou singularitu $\Leftrightarrow \forall n < 0: a_n = 0$;
2. f má v z_0 pól násobnosti $p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{-p} \neq 0$ a $\forall n < -p: a_n = 0$;
3. f má v z_0 podstatnou singularitu $\Leftrightarrow a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.

Důkaz.

1. jasné
2. f má v z_0 pól násobnosti p , právě když $g(z) := (z-z_0)^p f(z)$ má v z_0 odstranitelnou singularitu a po jejím odstranění je $g(z_0) \neq 0$. Neboli $(z-z_0)^p f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$, $z \in P(z_0, r)$ a $b_0 = g(z_0) \neq 0$, tzn.

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^p} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^{n-p}, \quad z \in P(z_0, r).$$

3. Z 1., 2. máme, že f nemá v z_0 podstatnou singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro konečně mnoho $n < 0$.

□

Věta 7.27 (Rozklad holomorfní funkce s konečně mnoha izolovanými singularitami). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $M \subset G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Pro každé $s \in M$ označme H_s součet hlavní části Laurentova rozvoje funkce f kolem s . Potom existuje jediná $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum_{s \in M} H_s + h$ na $G \setminus M$.

Důkaz. Zřejmě $\forall s \in M : H_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{s\})$. Funkce $h := f - \sum_{s \in M} H_s$ je holomorfní na $G \setminus M$ a v bodech $s \in M$ má odstranitelné singularity. Skutečně, necht $s_0 \in M$. Potom existuje $r_0 > 0$ tak, že $P(s_0, r_0) \subset G \setminus M$ a $f = R_{s_0} + H_{s_0}$ na $P(s_0, r_0)$, kde R_{s_0} je součet regulární části Laurentova rozvoje f kolem s_0 a $R_{s_0} \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0))$. Tedy na $P(s_0, r_0)$ máme

$$h = R_{s_0} + H_{s_0} - \sum_{s \in M} H_s = R_{s_0} - \sum_{\substack{s \neq s_0 \\ s \in M}} H_s \in \mathcal{H}(U(s_0, r_0)).$$

□

7.5 Reziduum

Definice 7.28. Necht $f \in \mathcal{H}(P(z_0))$ a necht $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in P(z_0)$. Potom reziduem f v z_0 nazveme číslo $\text{res}_{z_0} f := a_{-1}$.

Věta 7.29 (Reziduová na hvězdovitých oblastech). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast, $M \subset G$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Necht φ je uzavřená křivka v $G \setminus M$. Potom máme

$$\int_{\varphi} f = 2\pi i \sum_{s \in M} \text{res}_s f \cdot \text{ind}_{\varphi} s. \quad (\text{RV})$$

Poznámka. Pro $M = \emptyset$ dostaneme Cauchyho větu.

Důkaz. Podle předchozí věty existuje $h \in \mathcal{H}(G)$ tak, že $f = \sum_{s \in M} H_s + h$ na $G \setminus M$. Potom máme $\int_{\varphi} f = \sum_{s \in M} \int_{\varphi} H_s$, protože $\int_{\varphi} h = 0$ z Cauchyho věty pro hvězdovité oblasti. Pro každé $s \in M$:

$$\int_{\varphi} H_s(z) dz = \int_{\varphi} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \frac{1}{(z-s)^n} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^s \int_{\varphi} \frac{dz}{(z-s)^n} = 2\pi i \cdot \text{res}_s f \cdot \text{ind}_{\varphi} s,$$

jelikož suma konverguje stejnoměrně na $\langle \varphi \rangle$ a poslední integrál je roven 0 pro $n \neq 1$ (neboť jinak má integrand PF, a tudíž je integrál přes uzavřenou křivku nulový) a $2\pi i \cdot \text{ind}_{\varphi} s$, je-li $n = 1$. □

Příklad 7.30. Necht $\varphi := \psi^+ + [-1; 1]$, kde $\psi^+(t) := e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Potom $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle = G_0 \cup G_{\infty}$, kde G_0 je omezená komponenta ("vnitřek") a G_{∞} je neomezená komponenta ("vnějšek"). Platí

$$\text{ind}_{\varphi} s = \begin{cases} 1, & s \in G_0 \\ 0, & s \in G_{\infty}. \end{cases}$$

Položme $\tilde{\varphi} := \psi^- + [1; -1]$, kde $\psi^-(t) := e^{it}$, $t \in [-\pi, 0]$. Potom pro $|s| < 1$ máme

$$1 = \text{ind}_{\varphi + \tilde{\varphi}} s = \text{ind}_{\varphi} s + \text{ind}_{\tilde{\varphi}} s.$$

8 Speciální typy integrálů

Věta 8.1. *Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí*

1. $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$,
2. $st(Q) \geq st(P) + 2$, kde $st(Q)$ je stupeň polynomu Q .

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2i\pi \cdot \sum_{\substack{Q(s)=0 \\ \text{Im}(s) > 0}} \text{res}_s R. \quad (1)$$

Důkaz. Ukažte, že integrál v (1) konverguje, právě když platí 1., 2 (za cvičení). Nechť $r > 0$ a $\varphi_r := \varphi_r^1 + \varphi_r^2$, kde $\varphi_r^1(t) := t$, $t \in [-r, r]$ a $\varphi_r^2(t) := re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Je-li $r > 0$ tak velké, aby uvnitř φ_r ležely všechny póly R z horní poloroviny, potom

$$2i\pi \cdot \sum_{\substack{Q(s)=0 \\ \text{Im}(s) > 0}} \text{res}_s R \stackrel{(RV)}{=} \int_{\varphi_r} R = \int_{\varphi_r^1} R + \int_{\varphi_r^2} R. \quad (2)$$

Máme

$$\int_{\varphi_r^1} R = \int_{-r}^r R \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R.$$

Protože $\int_{\varphi_r^2} R \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow +\infty$, dostaneme z (2) pro $r \rightarrow \infty$, že platí (1). Neboť existuje $C > 0$, $r_0 > 0$ tak, že $|R(z)| \leq \frac{C}{r^2}$, je-li $|z| = r \geq r_0$. Máme totiž

$$|R(z)| = \left| \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m} \right| = \frac{1}{|z|^2} |z|^{n-m+2} \cdot \underbrace{\left| \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_m}{z^m}} \right|}_{\xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{a_0}{b_0}}.$$

Tedy

$$\left| \int_{\varphi_r^2} R \right| \leq V(\varphi_r^2) \cdot \max_{\langle \varphi_r^2 \rangle} |R| \leq r\pi \frac{C}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

□

Příklad 8.2.

$$I = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{\text{sudá}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{:=R(x)} dx = i\pi \cdot (\text{res}_{z_0} R + \text{res}_{z_1} R)$$

$$= -\frac{i\pi}{4\sqrt{2}} \left[(1+i)^2 - (1-i)^2 \right] = -\frac{i\pi}{4\sqrt{2}} 2 \cdot 2i = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

protože

$$\text{res}_{z_k} R = \frac{z_k^2+1}{4z_k^3} \cdot \frac{z_k}{z_k} = -\frac{1}{4}(z_k^2+1)z_k,$$

$$\text{res}_{z_0} R = -\frac{1}{4}(i+1)(1+i) \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)^2,$$

$$\text{res}_{z_1} R = -\frac{1}{4}(-i+1)(-1+i) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)^2.$$

Věta 8.3. *Nechť $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy, které nemají společné kořeny a platí*

1. $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$,
2. $st(Q) \geq st(P) + 1$.

Nechť $a > 0$. Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax} dx = 2i\pi \cdot \sum_{\substack{Q(s)=0 \\ \text{Im}(s) > 0}} \text{res}_s \left(R(z)e^{iaz} \right). \quad (3)$$

Důkaz. Za cvičení:

- Dokažte, že Newtonův integrál v (3) konverguje právě když platí 1., 2.
- Jak se spočte tento integrál pro $a < 0$?

Jako v předešlé větě integrujeme podél φ_r funkci $R(z)e^{iaz}$ a pošleme $r \rightarrow \infty$. Platí, že

$$\int_{\varphi_r^2} R(z)e^{iaz} dz \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

z *Jordanova Lemmatu* (bylo na 5. cvičení), z 2. totiž máme, že $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$. $\square$

Poznámka 8.4. Je-li $a < 0$, potom (4) obecně neplatí. V tomto případě je nutno integrovat přes dolní půlkružnici.

Příklad 8.5. Spočteme Fourierovu transformaci $\mathcal{F}$ funkce $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$, kde

$$(\mathcal{F}f)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Nechť $t > 0$. Potom $(\mathcal{F}f)(t) = i \cdot \text{res}_i (f(z)e^{itz}) = i \cdot \frac{e^{-t}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2}$.
- Nechť $t < 0$. Potom $(\mathcal{F}f)(t) = i \cdot \text{res}_{(-i)} (f(z)e^{itz}) \cdot (-1) = -i \cdot \frac{e^{-t}}{2 \cdot (-i)} = \frac{e^t}{2}$.

Lépe:

$$(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) + i \sin(tx)}{1+x^2} dx = \frac{e^{-|t|}}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 8.6.

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{x^2+1} dx \right)}_{:=I} = \frac{\pi}{2e},$$

protože

$$I = 2\pi i \text{res}_i f = 2\pi i \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{\pi i}{e}.$$

9 Index

Poznámka 9.1. Otázka: Jak $\text{ind}_\varphi s$ vypočítat? BÚNO: $s = 0$.

Značení 9.2 (Polární vyjádření). Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá. Víme, že $0 \neq z = |z|e^{i\theta} = e^\phi$, kde $\theta \in \text{Arg}(z)$ a $\phi = \log|z| + i\theta \in \text{Log}(z)$. Potom pro každé $t \in [\alpha, \beta]$ je $0 \neq \varphi(t) = |\varphi(t)|e^{i\theta(t)} = e^{\phi(t)}$, kde $\theta(t) \in \text{Arg}(\varphi(t))$ a $\phi(t) = \log|\varphi(t)| + i\theta(t) \in \text{Log}(\varphi(t))$. Otázkou je, zda lze θ a Φ zvolit spojitě na $[\alpha, \beta]$.

Definice 9.3. Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá. Řekneme, že $\theta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$) je *jednoznačná větev argumentu* (resp. *jednoznačná větev logaritmu*) křivky φ , pokud je θ (resp. ϕ) spojitá na $[\alpha, \beta]$ a $\forall t \in [\alpha, \beta] : \theta(t) \in \text{Arg}(\varphi(t))$ (resp. $\phi(t) \in \text{Log}(\varphi(t))$).

Poznámka 9.4. Vždy existuje jednoznačná větev argumentu a logaritmu pro spojitou křivku φ (cvičení). Dokážeme si to jen pro regulární křivky.

Věta 9.5 (O jednoznačnosti jednoznačné větve argumentu a logaritmu). Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá křivka. Potom

- ϕ je jednoznačná větev logaritmu φ , právě když $\text{Re}(\phi) = \log|\varphi|$ a $\text{Im}(\phi)$ je jednoznačná větev argumentu φ .
- Jsou-li θ_1, θ_2 jednoznačné větve argumentu φ , potom existuje $k \in \mathbb{Z}$, že $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$.

Důkaz.

- Z definice argumentu a logaritmu.
- Pro $\forall t \in [\alpha, \beta]$ existuje $k(t) \in \mathbb{Z}$, že $\theta_2(t) = \theta_1(t) + 2k(t)\pi$. Protože $k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{Z}$ je spojitá a $[\alpha, \beta]$ je souvislá, je k konstantní na $[\alpha, \beta]$.

□

Věta 9.6 (O existenci jednoznačné větve logaritmu pro regulární křivky). Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je regulární křivka. Potom existuje jednoznačná větev logaritmu ϕ křivky φ a platí, že

$$\int_\varphi \frac{dz}{z} = \phi(\beta) - \phi(\alpha).$$

Navíc $\text{Im}(\phi)$ je jednoznačná větev argumentu φ .

Důkaz. Hledáme spojitě ϕ takové, že $\varphi = e^\phi$. Zřejmě $\int_\varphi \frac{dz}{z} = \int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$. Položme $\phi_0(s) := \int_\alpha^s \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$, $s \in [\alpha, \beta]$. Potom ϕ_0 je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a $\phi'_0 = \frac{\varphi'}{\varphi}$ na $[\alpha, \beta] \setminus K$, kde K je konečná. Potom na $[\alpha, \beta] \setminus K$ je $(\varphi e^{-\phi_0})' = (\varphi' - \varphi \phi'_0)e^{-\phi_0} = 0$. Tedy existuje $c \in \mathbb{C}$, že $\varphi e^{-\phi_0} = e^c$ na $[\alpha, \beta]$. Položme $\phi := \phi_0 + c$. □

Věta 9.7 (O výpočtu indexu). Nechť $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je uzavřená regulární křivka a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Nechť $\tilde{\varphi} := \varphi - s$ a θ je jednoznačná větev argumentu křivky $\tilde{\varphi}$. Potom

$$\text{ind}_\varphi s = \text{ind}_{\tilde{\varphi}} 0 = \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi}. \quad (\text{oVI})$$

Speciálně, $\text{ind}_\varphi s \in \mathbb{Z}$.

Poznámka.

- Je-li φ pouze spojitá, definujeme $\text{ind}_\varphi s$ vztahem (oVI).

- Z (oVI) je jasné, že $\text{ind}_\varphi s$ je počet otočení φ kolem s proti směru hodinových ručiček.

Důkaz. Máme, že

$$\begin{aligned}\text{ind}_\varphi s &\stackrel{z=\varphi(t)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-s} dt \stackrel{z=\varphi(t)-s}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\varphi}} \frac{dz}{z} = \text{ind}_{\tilde{\varphi}} 0 \stackrel{\text{Věta}}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\phi(\beta) - \phi(\alpha)) = \frac{1}{2\pi i} (i \text{Im} \phi(\beta) - i \text{Im} \phi(\alpha)) = \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi} = K\end{aligned}$$

pro nějaké $K \in \mathbb{Z}$, kde ϕ je jednoznačná větev logaritmu $\tilde{\varphi}$. Zřejmě $\text{Re}(\phi(\beta)) = \log |\tilde{\varphi}(\beta)| = \log |\tilde{\varphi}(\alpha)| = \text{Re}(\phi(\alpha))$ a $\text{Im}(\phi)$ je jednoznačná větev argumentu $\tilde{\varphi}$. $\square$

10 Obecná Cauchyho věta a reziduová věta pro cykly

Definice 10.1. Konečnou posloupnost $\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou uzavřené (regulární) křivky v $\mathbb{C}$, budeme nazývat *cyklus*.

Značení 10.2. Necht $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je cyklus. Definujeme

- *graf* Γ jako

$$\langle \Gamma \rangle := \bigcup_{k=1}^n \langle \varphi_k \rangle,$$

- *délku* Γ jako

$$V(\Gamma) := \sum_{k=1}^n V(\varphi_k),$$

- je-li f spojitá na $\langle \Gamma \rangle$, pak

$$\int_\Gamma f := \sum_{k=1}^n \int_{\varphi_k} f,$$

- *index*

$$\text{ind}_\Gamma(z_0) := \sum_{k=1}^n \text{ind}_{\varphi_k}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0},$$

- *vnitřek* Γ jako $\text{Int } \Gamma := \{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle : \text{ind}_\Gamma(z_0) \neq 0\}$,

- *vnějšek* Γ jako $\text{Ext } \Gamma := \{z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle : \text{ind}_\Gamma(z_0) = 0\}$.

Poznámka 10.3. • Rozmyslete si, že podobně jako pro křivky, je zobrazení $z \mapsto \text{ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$ konstantní na každé komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ a jediná neomezená komponenta $\mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ leží v $\text{Ext } \Gamma$.

- Zřejmě máme rozklad $\mathbb{C} = \text{Int } \Gamma \cup \langle \Gamma \rangle \cup \text{Ext } \Gamma$, kde $\text{Int } \Gamma$, $\text{Ext } \Gamma$ jsou otevřené a $\langle \Gamma \rangle$, $\text{Int } \Gamma \cup \langle \Gamma \rangle$ jsou kompaktní.

Poznámka 10.4. Uzavřenou křivku φ chápeme jako cyklus $\Gamma := \{\varphi\}$.

Příklad 10.5. Je-li $\psi := \varphi \div \varphi$, $\varphi(t) := e^{it}$, pro $t \in [0, 2\pi]$. Potom $\langle \psi \rangle = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\text{Int } \psi = \emptyset$ a $\text{Ext } \psi = \mathbb{C} \setminus \langle \psi \rangle$.

Věta 10.6 (Obecná Cauchyho pro cykly). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a Γ je cyklus v G , tedy $\langle \Gamma \rangle \subset G$. Potom platí, že

$$\forall f \in \mathcal{H}(G) : \int_\Gamma f = 0, \quad (\text{CV})$$

právě tehdy, když $\text{Int } \Gamma \subset G$.

Příklad 10.7. Necht f je holomorfní funkce na mezikruží $P(z_0, r, R)$, kde $0 \leq r < R \leq \infty$. Necht $r < r_1 < r_2 < R$ a $\varphi_j(t) := z_0 + r_j e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom víme, že $\int_{\varphi_1} f = \int_{\varphi_2} f$. Plyne to z předchozí věty pro $\Gamma := \{\div \varphi_1, \varphi_2\}$. Protože $\text{Int } \Gamma = P(z_0, r_1, r_2)$, máme $0 = \int_{\Gamma} f = \int_{\varphi_1} f - \int_{\varphi_2} f$.

Věta 10.8 (Reziduová pro cykly). Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, Γ je cyklus v G a $\text{Int } \Gamma \subset G$. Necht $K \subset G \setminus \langle \Gamma \rangle$ je konečná a $f \in \mathcal{H}(G \setminus K)$. Potom platí

$$\int_{\Gamma} f = 2\pi i \sum_{s \in K} \text{res}_s(f) \cdot \text{ind}_{\Gamma}(s). \quad (\text{RVC})$$

Důkaz. Zcela analogický jako pro (RV) na hvězdovitých oblastech. $\square$

Důkaz věty 10.6 (Obecná Cauchyho pro cykly).

" $\implies$ ": Necht platí (CV). Je-li $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, pak $f(z) := \frac{1}{z-z_0} \in \mathcal{H}(G)$ a podle (CV) je $\text{ind}_{\Gamma} z_0 = 0$, neboli $z_0 \in \text{Ext } \Gamma$.

" $\impliedby$ ": Necht $\text{Int } \Gamma \subset G$ a $f \in \mathcal{H}(G)$. Nejprve dokážeme, že

$$\forall \xi \in G \setminus \langle \Gamma \rangle : \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \xi} = f(\xi) \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi, \quad (\text{CV}_z)$$

což je ekvivalentní s

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - \xi} - f(\xi) \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi. \quad (*)$$

Položme

$$g(z, \xi) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} & \text{pro } z \neq \xi, (z, \xi) \in G \times G, \\ f'(z) & \text{pro } z = \xi, (z, \xi) \in G \times G. \end{cases}$$

Potom

- (a) g je spojitá na $G \times G$. Jasně v bodech (z, ξ) , $z \neq \xi$. Necht $z_0 \in G$. Dokážeme, že g je spojitá v (z_0, z_0) . Necht $\varepsilon > 0$. Protože f' je spojitá v $z_0 \in G$, existuje $r > 0$ takové, že $U(z_0, r) \subset G$ a

$$\forall z \in U(z_0, r) : |f'(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon. \quad (\times)$$

Je-li $z, \xi \in U(z_0, r)$ a $z \neq \xi$, potom pro úsečku $\varphi(t) := \xi + t(z - \xi)$, $t \in [0, 1]$ platí

$$f(z) - f(\xi) = \int_{\varphi} f' = \int_0^1 f'(\varphi(t)) \cdot (z - \xi) dt = (z - \xi) \cdot \int_0^1 f'(\varphi(t)) dt,$$

tudíž

$$|g(z, \xi) - g(z_0, z_0)| = \left| \int_0^1 (f'(\varphi(t)) - f'(z_0)) dt \right| \stackrel{(\times)}{\leq} \varepsilon.$$

Pro $z \in U(z_0, r)$ je

$$|g(z, z) - g(z_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| \leq \varepsilon$$

z $(\times)$.

- (b) $\forall z \in G : g(z, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$. Jasně pro $\xi \neq z$. V $\xi = z$ je ale odstranitelná singularita. Položme

$$h(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, \xi) dz, \quad \xi \in G.$$

Podle věty o derivování integrálu podle komplexního parametru platí, že $h \in \mathcal{H}(G)$. Je-li $\xi \in G \cap \text{Ext } \Gamma$, potom z $(*)$ máme $h(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz$. Položme

$$h(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz, \quad \xi \in \text{Ext } \Gamma \setminus G_{\text{ot.}}$$

Potom h je holomorfní na G i na $\text{Ext } \Gamma$, tedy i na celém $\mathbb{C} = G \cup \text{Ext } \Gamma$. Ukážeme že h je omezená. Potom z věty 5.37 (Liouville) plyne, že h je konstantní. Skutečně, máme $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) = 0$. To plyne takto. Nechť $\langle \Gamma \rangle \subset U(0, R)$. Je-li $|\xi| > R$, potom

$$|h(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot V(\Gamma) \cdot \max_{\langle \Gamma \rangle} |f| \cdot \frac{1}{|\xi| - R} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0,$$

protože $|z - \xi| \geq |\xi| - |z| \geq |\xi| - R$. Tedy $h = 0$ na $\mathbb{C}$, speciálně platí (CV_z) .

Dále zvolme $\xi \in G \setminus \langle \Gamma \rangle$ a polořme

$$f_1(z) := (z - \xi)f(z), \quad z \in G.$$

Podle (CV_z) je

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{f_1(z) dz}{z - \xi} \stackrel{(CV_z)}{=} 2\pi i \cdot \underbrace{f_1(\xi)}_{=0} \cdot \text{ind}_{\Gamma} \xi = 0.$$

□

V důkazu potřebujeme lepší větu o derivování integrálu podle komplexního parametru.

Věta 10.9 (O derivování integrálu podle komplexního parametru). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a Γ je cyklus. Nechť g je spojitá funkce na $\langle \Gamma \rangle \times G$ a $\forall z \in \langle \Gamma \rangle : g(z, \cdot) \in \mathcal{H}(G)$. Potom je funkce*

$$h(\xi) := \int_{\Gamma} g(z, \xi) dz, \quad \xi \in G$$

holomorfní na G .

Důkaz. Zřejmě je h spojitá na G . Nechť Δ je trojúhelník v G . Potom

$$\int_{\partial \Delta} h(\xi) d\xi = \int_{\partial \Delta} \left(\int_{\Gamma} g(z, \xi) dz \right) d\xi \stackrel{Fubini}{=} \int_{\Gamma} \underbrace{\left(\int_{\partial \Delta} g(z, \xi) d\xi \right)}_{\substack{\text{Goursat} \\ = 0}} dz = 0.$$

Z Věty 5.35 (Morera) plyne, že $h \in \mathcal{H}(G)$. □

Poznámka 10.10. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá oblast. Potom platí

$$\text{pro každý cyklus } \Gamma \text{ v } G \text{ je } \text{Int } \Gamma \subset G. \quad (\text{JS})$$

Důkaz. Plyne z Věty 10.6 (Obecná Cauchyho pro cykly) a z 5.26 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti). □

Otázka: Charakterizuj $G \subset \mathbb{C}$ otevřené, pro které platí (JS).

Věta 10.11. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Potom platí (JS), právě když $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Těžší. Bude v KA1.

$\Leftarrow$ Nechť Γ je cyklus v G . Polořme $\text{ind}_{\Gamma} \infty = 0$. Potom zřejmě $\text{ind}_{\Gamma} : \mathbb{S} \setminus \langle \Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ je spojitá, tudíž konstantní na každé komponentě $\mathbb{S} \setminus \langle \Gamma \rangle$. Speciálně, máme $\forall s \in \mathbb{S} \setminus G : \text{ind}_{\Gamma} s = 0$, tedy $\text{Int } \Gamma \subset G$. □

Definice 10.12. Oblast $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduře souvislá* (j. s.), pokud $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá.

Poznámka 10.13.

1. Hvězdovité oblasti $\subsetneq$ jednoduše souvislé oblasti.
2. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ *jednoduše souvislá oblast*, potom v Cauchyově a reziduové větě je podmínka " $\text{Int } \Gamma \subset G$ " splněna automaticky, je-li Γ cyklus v G .

Definice 10.14. Řekneme, že uzavřená spojitá křivka $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je *Jordanova*, pokud $\varphi|_{[\alpha, \beta]}$ je prosté zobrazení.

Poznámka 10.15. Pojem indexu, vnitřku a vnějšku lze zobecnit i pro *spojité* uzavřené křivky.

Věta 10.16 (Jordanova). *Nechť φ je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$. Potom $\text{Int } \varphi$ a $\text{Ext } \varphi$ jsou oblasti a $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle = \text{Int } \varphi \cup \text{Ext } \varphi$. Navíc buď $\forall s \in \text{Int } \varphi : \text{ind}_\varphi s = 1$, nebo $\forall s \in \text{Int } \varphi : \text{ind}_\varphi s = -1$.*

Důkaz. Těžký, nebude. □

11 Zajímavé funkce

11.1 Funkce Gama

Definice 11.1 (Funkce Γ). Položme

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (1)$$

Lemma 11.2. *Funkce Γ je holomorfní funkce na $\text{Re}(z) > 0$.*

Důkaz. Nechť $z = x + iy$. Potom integrál konverguje jako Lebesgueův, právě když $\text{Re}(z) > 0$. Skutečně, $t^{z-1} = e^{(x+iy-1) \cdot \log t}$, $|t^{z-1}| = t^{x-1}$. Dále z vět o spojitosti a derivování integrálu podle reálných parametrů x, y máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, y) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1} \log(t) e^{-t} dt = -i \frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \text{ protože} \\ \frac{\partial t^{z-1}}{\partial x} &= t^{z-1} \log(t) = -i \frac{\partial t^{z-1}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Z věty 3.6 (Cauchy-Riemannova) plyne, že Γ je holomorfní na $\text{Re}(z) > 0$. □

Lemma 11.3. $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, $\text{Re}(z) > 0$. *Speciálně, $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, 2, \dots$*

Důkaz.

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1, \\ \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} \underbrace{t^z}_u \underbrace{e^{-t}}_{\frac{dv}{dt}} dt \stackrel{\text{per partes}}{=} \underbrace{\left[-t^z e^{-t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + z \cdot \Gamma(z), \\ \frac{du}{dt} &= z t^{z-1}, \quad v := -e^{-t}. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Z věty 6.8 (O jednoznačnosti pro holomorfní funkce) stačí rovnost dokázat např. pro reálné $z > 0$.

Lemma 11.4. Funkci Γ lze jednoznačně rozšířit na funkci holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$, přičemž v bodech $0, -1, -2, -3, \dots$ má Γ jednoduché póly a $\text{res}_{-n} \Gamma = (-1)^n / n!$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Důkaz. Víme z 11.3, že

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (*)$$

Protože pravá strana má smysl i pro $0 \geq \text{Re}(z) > -1$, $z \neq 0$, definujeme pro taková z funkci $\Gamma(z)$ jako $\frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Nyní má ale pravá strana smysl pro $-1 \geq \text{Re}(z) > -2$, $z \neq -1, 0$ a pro taková z rozšíříme definici Γ opět pomocí (*), atd. Z věty o jednoznačnosti plyne, že toto holomorfní rozšíření Γ je jednoznačné. Navíc máme

$$\begin{aligned} \text{res}_0 \Gamma(z) &= \text{res}_0 \left(\frac{\Gamma(z+1)}{z} \right) = \Gamma(1) = 1, \\ \text{res}_{-1} \Gamma(z) &= \text{res}_{-1} \left(\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \right) = -\Gamma(1) = -1, \\ \text{res}_{-n} \Gamma(z) &= \text{res}_{-n} \left(\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} \right) = \frac{\Gamma(1)}{n!} \cdot (-1)^n = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

protože $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1) \cdots z \cdot \Gamma(z)$. □

11.2 Riemannova zeta funkce

Definice 11.5 (Riemannova ζ funkce). Pro $\text{Re}(z) > 1$ položíme

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (2)$$

Lemma 11.6. Funkce ζ je holomorfní funkce na $\text{Re } z > 1$.

Důkaz. Skutečně, řada v (2) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\text{Re } z > 1$, protože

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \left| e^{-z \cdot \log(n)} \right| = e^{-\text{Re}(z) \cdot \log n} \leq \frac{1}{n^{x_0}},$$

je-li $\text{Re}(z) \geq x_0 > 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}} < +\infty$. Z Věty 5.40 (Weierstrass) plyne $\zeta \in \mathcal{H}(\{\text{Re}(z) > 1\})$. □

Definice 11.7 (Dirichletova eta funkce).

$$\eta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (3)$$

Lemma 11.8. Funkce η je holomorfní na $\text{Re}(z) > 0$.

Důkaz. Na $\text{Re}(z) > 1$ je důkaz stejný jako pro ζ . Na $0 < \text{Re}(z) \leq 1$ řada v (3) konverguje neabsolutně - pro reálná z je důkaz snadný. □

Lemma 11.9. Platí

$$\eta(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z), \quad \text{Re}(z) > 1.$$

Důkaz. Necht $\operatorname{Re}(z) > 1$. Potom

$$\begin{aligned}\zeta(z) + \eta(z) &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} \text{ a} \\ \eta(z) &\stackrel{\text{abs.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} = \frac{\zeta(z) + \eta(z)}{2} - \frac{1}{2^z} \zeta(z), \text{ tudíž} \\ \eta(z) &= \zeta(z) - 2^{1-z} \zeta(z).\end{aligned}$$

□

Lemma 11.10. $\varphi(z) := 1 - 2^{1-z}$ je celá funkce, která má nulové body právě v bodech

$$z_k := 1 + k \cdot \frac{2\pi i}{\log 2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

a to jednoduché.

Důkaz.

- $2^{1-z} = e^{(1-z)\log 2} = 1 \iff (1-z) \cdot \log 2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$
- $\varphi'(z) = 2^{1-z} \cdot \log 2, \quad \varphi'(z_k) = \log 2 \neq 0.$

□

Lemma 11.11. Funkci ζ lze jednoznačně rozšířit na holomorfní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ s jednoduchým pólem v 1 a $\operatorname{res}_1 \zeta = 1$.

Důkaz. Z 11.9 víme, že pro $\operatorname{Re}(z) > 1$ je

$$\zeta(z) = \frac{\eta(z)}{(1 - 2^{1-z})}. \quad (*)$$

Protože pravá strana (*) má smysl i pro $1 \geq \operatorname{Re}(z) > 0$, $z \neq z_k$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$, rozšíříme ζ holomorfně pro taková z pomocí (*). Dále z (*) máme $\operatorname{res}_1 \zeta = \frac{\eta(1)}{\varphi'(1)} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$. Pro další vlastnosti ζ viz např. [CONWAY, J. B.; Functions of one complex variable, Springer, 1978]. □

Lemma 11.12. Mimo kritický pás $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ má ζ nulové body právě v $-2, -4, -6, -8, \dots$, které se nazývají triviální nulové body.

Riemannova hypotéza Je-li z nulový bod funkce ζ v kritickém pásu, potom $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Jeden z nejslavnějších otevřených problémů v matematice (odměna 1 milion \$). Má úzkou souvislost s rozložením prvočísel, viz [Riemann, B.; Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, anglický překlad: On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity, 1859]

Věta 11.13 (Eulerova). Je-li $\operatorname{Re}(z) > 1$, potom

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right), \quad (4)$$

kde $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost všech prvočísel.

Poznámka. Zde $\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N a_n$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{1 - \prod_{|\dots| < 1} p_n^{-z}} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_n^{-mz}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 - p_k^{-z}} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} n_j^{-z} \quad (*)$$

jsou-li $n_1, n_2, \dots$ všechna přirozená čísla, která se dají rozložit na součin mocnin jen prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_n$. Zde se využívá jednoznačnosti faktorizace n_j jako součinu prvočísel. Pokud v (*) pošleme $n \rightarrow \infty$, dostaneme (4). $\square$

11.3 Prvočíselná věta

Věta 11.14 (Prvočíselná). [HADAMARD, J.; POUSSIN, Ch. J. de Pa Vallée; 1896] *Nechť $\pi(x)$ je počet prvočísel $p \leq x$ pro každé $x > 0$. Potom*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \text{ pro } x \rightarrow \infty$$

$$\text{tzn. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x} \right)} = 1$$

Poznámka. První velký úspěch KA. Nyní existují důkazy, které užívají pouze elementární techniky z UKA - Cauchyho integrální vzorec, Cauchyho větu a odhady křivkových integrálů.

Poděkování:

Tyto poznámky byly vytexány společnou prací několika studentů 3. ročníku bakalářského studia obecné matematiky. Bez jejich iniciativy by tyto poznámky nevznikly.

Kateřina Lipavská, Stanislav Mosný, Terka Poláková a Petr Sedláček