Příklady na 13. a 14. týden

Parciální diferenciální rovnice

Rovnice vedení tepla

1. Nalezněte řešení rovnice vedení tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$
splňující počáteční podmínku:
a) $u(0,x) = x^2 \cos(\beta, x), \quad \beta \in \mathbb{R}^N$
b) $u(0,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \cos(\beta, x), \quad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}^N$

2. Nalezněte řešení rovnice vedení tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+$$
splňující počáteční a okrajovou podmínku
$$u(t,0) = 0, \quad t > 0, \qquad u(0,x) = U_0 = const, \quad x > 0.$$

3. Nalezněte řešení rovnice vedení tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad x \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big)$$
splňující počáteční a okrajovou podmínku
a)
$$u(t,0) = u\Big(t, \frac{1}{2}\Big) = 0, \qquad u(0,x) = \delta_a, \quad a \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big)$$
b)
$$u_x(t,0) = u_x\Big(t, \frac{1}{2}\Big) = 0, \qquad u(0,x) = \delta_a, \quad a \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big)$$

4. Nalezněte řešení rovnice vedení tepla
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad x \in \Big(0, \frac{1}{4}\Big)$$
splňující počáteční a okrajovou podmínku
$$u(t,0) = u_x\Big(t, \frac{1}{2}\Big) = 0, \qquad u(0,x) = \delta_a, \quad a \in \Big(0, \frac{1}{4}\Big).$$
Určete $u(t, \frac{1}{4})$ a $u_x(t,0)$.

5. Najděte radiálně symetrické řešení rovnice vedení tepla v $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad x \in B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^3$$

splňující počáteční a okrajovou podmínku

$$u\Big(t, \frac{1}{2}\Big) = 0, \qquad u(0,x) = \chi_{[0,a]}(r), \quad r = |x| \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big), \qquad a \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big).$$

6. Nalezněte jedno řešení rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta(x) \otimes \mathrm{e}^{pt}, \qquad p > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Vlnová rovnice

7. Řešte Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathbb{R}$ s periodickými okrajovými podmínkami

$$\begin{gathered} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = 0, \\ u_t(0,x) = g(x), \end{gathered}$$

kde
a) $g(x) = \sin^3(2\pi x)$ b) $g(x) = \cos^4(\pi x)$.

8. Řešte vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^+$ s podmínkami

$$\begin{gathered} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^+,\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = 0, \\ u_t(0,x) = \delta_a, \quad a > 0, \\ u(0,t) = 0. \end{gathered}$$

9. Řešte vlnovou rovnici s podmínkami

$$\begin{gathered} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big),\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = 0, \\ u_t(0,x) = \delta_a, \quad a \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big), \end{gathered}$$

kde
a) $u(0,t) = u(\frac{1}{2}, t) = 0$ b) $u_x(0,t) = u_x(\frac{1}{2}, t) = 0$.

10. Řešte vlnovou rovnici s podmínkami

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(0,x) = 0,$$
$$u_t(0,x) = 1,$$
$$u(x,t) = 0, \quad |x| = \tfrac{1}{2}.$$

11. Řešte vlnovou rovnici s podmínkami

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(0,x) = \mathrm{e}^{-\alpha x^2}, \quad \alpha > 0,$$
$$u_t(0,x) = 0.$$

Laplaceova rovnice

Řešte rovnice

$$\Delta u = 0$$

v následujících dvoudimenzionálních oblastech Ω

12.
$$\Omega = \{(r,\varphi), 0 < r < a, 0 < \varphi < \alpha < 2\pi\},$$
$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0, \quad u(a,\varphi) = \varphi(\alpha - \varphi).$

13.
$$\Omega = \{(r,\varphi), a < r < \infty, 0 < \varphi < \alpha < 2\pi\},$$
$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0, \quad u(a,\varphi) = \varphi.$

14.
$$\Omega = \left\{(x,y), 0 < x, y < \frac{1}{2}\right\},$$
$u(0,y) = u(\frac{1}{2},y) = u(x,\frac{1}{2}) = 0, \quad u(x,0) = \sin^2(2\pi x).$

15.
$$\Omega = \left\{(x,y), 0 < x, y < \frac{1}{2}\right\},$$
$u(\frac{1}{2},y) = u(x,0) = u(x,\frac{1}{2}) = 0, \quad u(0,y) = y\cos(\pi y).$

16.
$$\Omega = \left\{(x,y), 0 < x, y < \frac{1}{2}\right\},$$
$u(0,y) = u(x,\frac{1}{2}) = 0, \quad u(x,0) = x, \quad u(\frac{1}{2},y) = \frac{1}{2} - y.$

Jiné rovnice

17. Nalezněte fundamentální řešení pro následující operátory, tj. řešení následujících úloh

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) &= \delta, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ N = 2, 3,\\
(-\Delta - k^2)u &= \delta, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}^+,\\
(-\Delta + k^2)u &= \delta, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}^+,\\
(\Delta^2 - k^2\Delta + k^4)u &= \delta, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}
$$