Zkouškové příklady – stejnoměrná konvergence posloupností i řad funkcí, mocninné řady

Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci a lokálně stejnoměrnou konvergenci

1. $f_n(x) = \dfrac{\log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}$
2. $f_n(x) = \dfrac{e^{\frac{\sqrt{x}}{n}} - 1}{\tan \frac{1}{n}}$
3. $f_n(x) = n \arctan \dfrac{x}{n}$
4. $f_n(x) = \left|\cos \dfrac{x}{n}\right|^n$
5. $f_n(x) = \dfrac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}$
6. $f_n(x) = e^{\frac{|x|-n}{|x|+n}} + e^{-\frac{|x|-n}{|x|+n}}$
7. $f_n(x) = \arctan(nx^2 + nx - 2n)$
8. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n+x^2}$
9. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{n}}{\sqrt{x+n}}$, bez lok.
10. $f_n(x) =$

Stejnoměrná konvergence řad funkcí

1. Mějme
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1 + n^4 x^2}$$
   (a) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje?
   (b) Je F spojitá na $(0, \infty)$?
   (c) Je F spojitá na svém definičním oboru?
2. Mějme
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$$
   (a) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje?
   (b) Najděte maximální intervaly, na kterých je F spojitá.
   (c) Je F diferencovatelná na $(0, \infty)$?
   (d) Je F diferencovatelná na $\mathbb{R}$?

3. Ukažte, že funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)$$

je spojitá v bodě 1. (Hint: Záměna sumy a derivace.)

4. Uvažujme řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 + n^3 x^4}.$$

   (a) Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ je tato řada konvergentní.
   (b) Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně na množině z části (a).

5. Mějme

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^2 x^2}$$

   (a) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje?
   (b) Je F spojitá na $(0, \infty)$?
   (c) Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci na $[-1, 1]$. Je F spojitá v 0?

6. Nechť je funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{(x+1)/4} - 5}{3}\right)^n$$

   (a) Nalezněte definiční obor funkce f (tj. určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \in \mathbb{R}$).
   (b) Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě 7.

Stejnoměrná konvergence řad funkcí Abel–Dirichlet

1. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \arctan n}{n^2 + 2x^2}$$

Určete definiční obor a obor spojitosti funkce f. Rozhodněte, zda na svém definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Spočtěte $f'(0)$, pokud existuje.

2. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \arccos \frac{x^2}{\sqrt{n}}.$$

Určete definiční obor a obor spojitosti funkce f. Rozhodněte, zda na svém definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Nalezněte maximální možný interval, na kterém má f vlastní derivaci, a spočtěte ji.

3. Mějme
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n \sin x}}{n^2}$$
   (a) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ tato řada konverguje?
   (b) Nalezněte maximální intervaly, na kterých je F spojitá.
   (c) Je F diferencovatelná na $(\pi, 2\pi)$?

Mocninné řady

1. Určete střed a poloměr konvergence mocniné řady. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ řada konverguje absolutně.
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+(-1)^n}{2+(-1)^n}\right)^n \left(\frac{x}{3}-1\right)^n$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)}{n+1}(2x+1)^n$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+1)^{2n}}{2n+1}$
   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n)(\operatorname{arccot} n)\ x^n$
   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}(x+1)^n$
   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{2+(-1)^n}\right)(2x+4)^n$
   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}(x+1)^n$
2. Sečtěte řadu (= určete poloměr konvergence mocninné řady a sečtěte na největším možném intervalu; případně zvolte vhodnou mocninnou řadu, určete její poloměr konvergence a sečtěte v daném bodě).
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{(n+1)3^n}$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^2-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}x^{2n}$
   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n}x^{2n+1}$
   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2n^2-n)x^{2n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} x^n$

(g) Sečtěte řadu uvnitř kruhu konvergence $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$

(h) Sečtěte řadu uvnitř kruhu konvergence $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}$

3. Uvažujte mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \tag{1}$$
kde
$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!}, & n > 1. \end{cases}$$
   - Určete poloměr řady.
   - Sečtěte řadu
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$
   - Sečtěte řadu (1) na největším možném intervalu.

4. Uvažujte mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \tag{2}$$
   - Určete poloměr konvergence řady.
   - Sečtěte řadu na největším možném intervalu a příslušnou funkci označte f.
   - Určete $f'''(0)$.

5. Uvažujte mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} x^{3n} \tag{3}$$
   - Určete poloměr konvergence řady.
   - Sečtěte řadu na intervalu konvergence.
   - Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n} (-1)^n$

6. Uvažujte mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{n!} x^n. \tag{4}$$
   - Určete poloměr konvergence řady.
   - Sečtěte řadu intervalu konvergence.
   - Je-li $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{n!} x^n$, spočtěte $f'(0)$.

7. Uvažujte mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^{2n-1} \tag{5}$$

- Určete poloměr konvergence řady.
- Sečtěte řadu intervalu konvergence.
- Je-li $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{2n-1}$ spočtěte $f''(0)$.

8. Uvažujte mocninnou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} x^{2n} \tag{6}$$
   - Určete poloměr konvergence řady.
   - Sečtěte řadu na intervalu konvergence.
   - Vyčíslete řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}$.
9. Rozviňte funkci
$$f(x) = \frac{\log(1-x^2)}{x}$$
   na maximálním možném intervalu se středem v bodě $x = 0$ a vyšetřete chování této mocninné řady v krajních bodech tohoto intervalu.