Zkouškové příklady – funkce více proměnných

Parciální derivace a totální diferenciál

1. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-2y^3}{4x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

   Vyšetřete, ve kterých bodech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ má funkce f totální diferenciál a spočtěte jej.

2. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5-y^5}{x^4+y^4}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

   Vyšetřete, ve kterých bodech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ má funkce f totální diferenciál a spočtěte jej.

3. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

   Vyšetřete, ve kterých bodech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ má funkce f totální diferenciál a spočtěte jej.

4. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x,y) = \max\{x^3, y^3\}$$

   Vyšetřete, ve kterých bodech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ má funkce f totální diferenciál a spočtěte jej.

5. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^5 + 2y^5}$$

   Vyšetřete, ve kterých bodech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ má funkce f totální diferenciál a spočtěte jej.

6. Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y) = \begin{cases} \left((x^2+y^2)(e^x-1), \frac{x^2}{x^2+y^2}\right), & [x,y] \neq [0,0], \\ (0,0), & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

   a $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem

$$G(s,t) = st.$$

   (a) Dokažte, že v bodě $[1,1]$ existuje derivace F, spočtěte její representující matici a jakobián.
   (b) Spočtěte $\frac{\partial(G\circ F)}{\partial x}(0,-3)$ a $\frac{\partial(G\circ F)}{\partial y}(0,-3)$, pokud existují.

7. Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(x \cos y, x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right), & [x,y] \neq [0,0], \\ (0,0), & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

   (a) Dokažte, že v bodě $[\sqrt{\frac{2}{\pi}}, 0]$ existuje derivace F, spočtěte její representující matici a určete jakobián F v bodě $[\sqrt{\frac{2}{\pi}}, 0]$.
   (b) Spočtěte $\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0)$ pokud existuje.

8. Nechť $F = (F_1, F_2, F_3, F_4) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y) = \left(\arctan(2x-y), x-y, (x^2-y^2)\frac{|x|}{1+|y|}, e^{x+y}\right)$$

   (a) Dokažte, že v bodě $[-1, 1]$ existuje derivace F a spočtěte její representující matici.
   (b) Spočtěte $\frac{\partial F_3}{\partial x}(0,0)$ pokud existuje.

9. Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y,z) = ((x+1)^2(y+1)(z+2), \sin x \cos(2y+z)).$$

   Zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má v bodě $[2, 0]$ derivaci representovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Dokažte, že v bodě $[0,0,0]$ existuje derivace zobrazení $G \circ F$ a spočtěte její representující matici.
   (b) Spočtěte derivaci funkce F_1 v bodě $[0,0,0]$ podle vektoru $(1,2,0)$.

10. Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - \sqrt{y}}$$

    a vyšetřete její parciální derivace.

11. Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \log(|x| + |y| - 2)$$

    a vyšetřete její parciální derivace.

Implicitní funkce

1. Ukažte, že daná rovnice určuje na okolí bodu $[\bar{x}, \bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.
   (a) $\sin(xy) + \cos(xy) = 1, [\bar{x}, \bar{y}] = [\pi, 0]$

(b) $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 0]$

(c) $\ln(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

(d) $x^y + y^x = 2y, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 1]$

(e) $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

(f) $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2), [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

(g) $\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

2. Ukažte, že rovnice
$$\sqrt{x + 3y^3} = e^{-x+1} + e^{-y+1}$$
určuje na jistém okolí bodu $(1, 1)$ implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$. Spočtěte $\varphi'(1)$.

3. Ukažte, že rovnice
$$\sqrt{x + y^3} + \cos(x + y) - \cos(x^3 + y^3) = \sqrt{6}$$
určuje na jistém okolí bodu $(-2, 2)$ implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$. Spočtěte $\varphi'(-2)$.

4. Ukažte, že rovnice
$$\log(x^2 + y) + e^{xy} + x - y = 2$$
určuje na jistém okolí bodu $(1, 0)$ implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$. Spočtěte $\varphi'(1)$.

Více implicitních funkcí

1. Ukažte, že vztahy
$$u = \ln(xy) + \cos v$$
$$v = e^{x-u} - y^2 - v$$
definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(1, 0) = 1$ a $y(1, 0) = 1$. Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce $y(u, v)$ v bodě $[1, 0]$ a pokud ano, nalezněte jej.

2. Ukažte, že vztahy
$$u = \ln(x^2 + y^2) - 2xy$$
$$v = e^x \sin y + \frac{1}{x^2}$$
definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, 1) = 1$ a $y(0, 1) = 0$. Nechť navíc je z funkce proměnných x a y definovaná na okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ předpisem $z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ a nechť Φ je funkce proměnných u a v definovaná na okolí bodu $[u, v] = [0, 1]$ předpisem $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$.

3. Ukažte, že vztahy
$$u = \sin(x + u) + \sin(y - v)$$
$$-v = \cos(xv) + \arctan(yu)$$
definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [\pi, 1, 0, 1]$ hladké funkce u, v proměnných x, y takové, že $u(\pi, 1) = 0$ a $v(\pi, 1) = 1$.
Nechť $h = [3, 4]$. Rozhodněte, zda existuje $D_h v(\pi, 1)$ (derivace funkce v podle vektoru h) a pokud ano, spočtěte ji.

4. Ukažte, že vztahy

$$x^3 - 3y^2 + 2u - v^2 = -1$$
$$x^2v^2 + u - vy = 5$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 0, 1, 2]$ hladké funkce u, v proměnných x, y takové, že $u(1, 0) = 1$ a $v(1, 0) = 2$.
Rozhodněte, zda existuje okolí bodu $[1, 0]$, na kterém je zobrazení

$$[x, y] \mapsto [u(x, y), v(x, y)]$$

difeomorfismus.

5.

Extrémy

1. Rozhodněte, zda má funkce f body globálního maxima a globálního minima na množině M, a pokud ano, určete je.
   (a) $f(x, y, z) = xy + yz$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$
   (b) $f(x, y, z) = z + e^{xy}$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$
   (c) $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$
   (d) $f(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)(x^2+9y^2)}$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$
   (e) $f(x, y, z) = \arctan(x^2)(y^2 + yz + z^2)$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in [-1, 1], y^2 + z^2 = 4\}$
   (f) $f(x, y) = xy^6$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^6 + y^6 \leq 64, x \leq 1\}$
   (g) $f(x, y, z) = xy + yz$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, y + z = 2\}$
   (h) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 100\}$
   (i) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$
   (j) $f(x, y, z) = x^2 + y + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$
   (k) $f(x, y, z) = x + y + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
   (l) $f(x, y, z) = x + y^2 + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2(1 - z), x^2 + y^2 \leq 2(z + 1)\}$
   (m) $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$
   (n) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, y \leq 3 - x\}$
   (o) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$
2. Uvažujte funkci
   $$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$$
   na množině
   $$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}.$$
   Nalezněte globální extrémy f na množině M. Má-li f uvnitř M stacionární body, určete pomocí druhého diferenciálu chování funkce v těchto bodech.
3. Nalezněte supremum a infimum funkce
   $$f(x, y) = x + 2y$$
   na množině
   $$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 18,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

4. Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3$$

na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 17\}.$$

Hint: $17^{3/4} < \frac{17}{2}$.

5. Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x, y) = \arctan x + \arctan y$$

na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\}.$$

6. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + 2y^2 + 4x^2$$

7. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \sin x\ \cos y$$

na $\mathbb{R}^2$.

8. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = xyz\ e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

na $\mathbb{R}^3$.

9. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 9xyz - 2x - 2y - 2z$$

na $\mathbb{R}^3$. Určete $\sup f$ a $\inf f$ na $\mathbb{R}^3$ a pokud existují globální extrémy, určete je.

10. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$$

na jejím definičním oboru.

11. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \sin^3 x\ \cos y$$

na jejím definičním oboru.

12. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

na jejím definičním oboru.

13. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

na jejím definičním oboru.

14. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-(2x+y)}$$

na jejím definičním oboru.

15. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{xy}{4}\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

na jejím definičním oboru.

16. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{xy}{2}\sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$$

na vnitřku jejího definičního oboru.

17. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = \sin x \;\cos y \;\cos(x-y)$$

na otevřené množině $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$.

18. Najděte všechny stacionární body funkce

$$f(x,y) = xy^2 - 2\sin(xy)$$

na $\mathbb{R}^2$ a určete chování funkce f v těchto bodech pomocí druhého diferenciálu (tj. hledejte lokální extrémy dané funkce na $\mathbb{R}^2$.)

19. Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = (x^2 + 2y)e^{-x-y}$$