



Poznámky a časté chyby

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Chybějící nebo špatné zdůvodnění VOLS

- (a) Úplně chybí podmínka (P) nebo (S).
- (b) Podmínka je v jiném bodě nebo s jinou hodnotou

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = 1$$

VOLS: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, podmínka (P): $\cos x \neq 0$ na $P(1, 1/42)$ místo správného $\cos x \neq 1$ na $P(0, 1/42)$

- (c) Okolí v podmínce (P) je mimo definiční obor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = 1$$

Podmínka (P) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, podmínka (P): $\cos x \neq 1$ na $P(0, 2\pi)$ (funkce $\cos x$ není na daném okolí kladná, tedy ji nelze dosadit do logaritmu) místo správného $P(0, \frac{\pi}{2})$.

- (d) podmínka (S) uplatněná v nekonečnu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^2+1}{2x-1}} = \infty$$

špatně: (S) spojitost funkce e^y (vlastně říkáme, že e^y je spojitá v nekonečnu, což není možné) místo správného (P) $\frac{x^2+1}{2x-1} \neq \infty$ na $P(\infty, 1/100)$.

- (e) Podmínka (S) u základních limit, které nejsou v daném bodě definované, tedy nemohou být spojitě.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = 1$$

Podmínka (S) (tedy vlastně říkáme že $\frac{\log y}{y-1}$ je spojitá v 1), místo správného podmínka (P): $\cos x \neq 1$ na $P(0, \frac{\pi}{2})$.

2. Špatně aplikovaná VOAL.

- (a) VOAL používáme až úplně na konci příkladu. Není možné ho použít jen na jednu část limity a na druhou ne.

Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2+3}{2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} \cdot \frac{1+3/n^2}{2} \\ &\stackrel{VOAL}{=} \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 3/n^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2} \right) \\ &= \frac{1}{1+0} \cdot \frac{1+0}{2} = 1/2, \end{aligned}$$

místo chybného

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2+3}{2n^2} &\stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{n^2+3}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{1+3/n^2}{2} \\ &\stackrel{VOAL}{=} \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 3/n^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2} \right) = \frac{1+0}{2} = 1/2, \end{aligned}$$

(b) Částečné limitění, např.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 \sin x} - \frac{1}{x^2} \stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \stackrel{AL}{=} 0$$

místo správného

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{2 \sin x + x \cos x} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Druhá limita se opět vyřeší L'Hospitalovým pravidlem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin x + x \cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \frac{1}{2 + 1 + 0} = \frac{1}{3}.$$

(c) Aplikace VOAL na neurčitý výraz, typicky $0 \cdot \infty$.

Chybně

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot (1 - 1) = 0.$$

místo správného

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

(d) Aplikace VOAL místo dvou policajtů. Chybně

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \stackrel{VOAL}{=} 0$$

místo správného

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

ze dvou policajtů .

(e) Aplikace VOAL místo škály. Chybně

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{2^n} \stackrel{VOAL}{=} 0$$

místo správného

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{2^n} \stackrel{\text{škála}}{=} 0$$

(f) VOAL je možno použít jen na konečné součty. Tedy nikoli na výraz typu

$$\frac{1}{n^n} + \frac{1}{n^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{n},$$

neboť se zvyšujícím se n roste počet sčítaných členů.

3. L'Hospital

- (a) Užití na součin nebo rozdíl.
Chybná aplikace

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \stackrel{L'H}{=}$$

místo správného

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$$

- (b) Neověření podmínek vedoucí k chybné aplikaci

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{2x + 2} = \frac{1}{6}$$

místo správného

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x} \stackrel{AL}{=} \frac{4 - 6 + 2}{4 + 4} = 0.$$

- (c) Ve složitějších případech (kdy podmínky nejsou vidět na první pohled) je třeba rozepsat ověření podmínek L'Hospitalova pravidla. Např. u

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}$$

je třeba nejprve upravit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{\cos x}{\sin x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{\sin x}}{x^2}$$

4. Zapomeneme dosadit do původního příkladu. Typicky u příkladu typu f^g

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x+1}{4x-5}}$$

vyjde výsledek $\frac{1}{4}$ místo $e^{\frac{1}{4}}$.

5. Díky nepřehlednému zápisu se změni význam. Např. se postupně z 2^n stane $2n$.

6. Částečné limitění. Místo nesprávného

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^n}} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 0} = 1.$$

budeme psát:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^n}} = 1,$$

ze dvou políciťů

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

7. Počítáme-li s **celou částí**, užíváme faktu

$$x \geq [x] > x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Běžné aritmetické operace neplatí, např.:

$$\frac{[a]}{[b]} \neq \left[\frac{a}{b} \right],$$

nebo

$$[a + b] \neq [a] + [b]$$

apod.

8. Pakliže limita posloupnosti **neexistuje**, je nutno dodržet následující postup: Nejprve najdeme vhodnou podposloupnost, typicky a_{2n} a a_{2n-1} . Pak zvlášť upočítáme jejich limity a uděláme závěr. Příklad: spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}.$$

Pro sudé členy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} \frac{(2n)^2 + 1}{2(2n)^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{4n^2 + 1}{8n^2 - 3} \stackrel{VOAL}{=} 4/8$$

a pro liché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n-1} \frac{(2n-1)^2 + 1}{2(2n-1)^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 \cdot \frac{4n^2 - 4n + 1 + 1}{4n^2 - 4n + 1 - 3} \stackrel{VOAL}{=} -4/8.$$

Dle věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že původní posloupnost nemá limitu. Počítat obě limity najednou není možné, jde o nesprávné použití VOAL. Např. není možné psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{n^2 \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^2}} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{2},$$

což nemá limitu, tedy původní limita neexistuje.

9. Heineho nelze užít na výraz $(-1)^n$. Pro limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$$

by vyšlo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^x \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3}$$

což není dobře definovaná funkce. Příklad je třeba řešit jako výše. V případě potřeby pak lze Heineho aplikovat pouze na

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$$

a získat tak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3}$$

10. Průběh funkce

- (a) Tvrdíme, že funkce je rostoucí/klesající na sjednocení intervalů. Špatně: $\frac{1}{x}$ je klesající na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ místo $\frac{1}{x}$ je klesající na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.
- (b) Chybí definiční obor pro derivaci.
- (c) Jestliže vyšetřujeme sudou (či lichou) funkci jen na $(0, \infty)$, je potřeba zvlášť vyšetřit derivaci v 0 a to zleva i zprava. Např. funkce $f(x) = \left| \frac{x}{x^2+2} \right|$ je sudá a v 0 nemá derivaci
- (d) Při určování oboru hodnot není zmíněna Bolzanova věta o nabývání mezihodnot.
- (e) Inflexní bod může být pouze v místě, kde funkce má vlastní derivaci. Tedy např. funkce $\frac{|1+x|}{\sqrt[3]{x}}$ nemá v bodě -1 inflexní bod.
- (f) Průběh funkce neodpovídá zjištěním - např. funkce je konvexní, ale na obrázku je konkávní.

11. Zapomenutá absolutní hodnota: $\sqrt{x^2} = x$ místo správného $\sqrt{x^2} = |x|$

12. Špatné vytýkání

$$\frac{(n+1)(n-1)}{n+2} = \frac{(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})}{1+\frac{2}{n}}$$

místo správného

$$\frac{(n+1)(n-1)}{n+2} = \frac{(1+\frac{1}{n})(n-1)}{1+\frac{2}{n}}$$

13. Známá limita ve špatném bodě. Např.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

místo správného

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

14. Vyjde-li nám, že $a_n \geq b_n$, kde $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, není třeba hledat druhého policajta. (Nejde o chybu, jen o dobrou radu.)

15. Typicky u 2 policajtů: píšeme-li nějakou nerovnost, tak musí být buď zjevná (např. $\sin n \leq 1$ nebo $0 \leq 2^n$), nebo ji musíme ukázat - buď indukcí nebo ze škály.

16. Nelze psát

$$\frac{4^n}{3^n} = a,$$

neboť výraz vlevo je posloupnost, kdežto vpravo číslo. Místo toho píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} = a$$

nebo

$$\frac{4^n}{3^n} = a_n.$$