Důležité příklady – absolutní konvergence

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci integrálů.

Příklad 1 $\displaystyle\int_0^1 x^a\,dx$, *kde* $a \in \mathbb{R}$.

Návod: Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Pro $a \neq -1$ je

$$\int x^a\,dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

primitivní funkcí k funkci x^a na $(0,1)$. Odtud je zřejmé, že pro $a > -1$ integrál konverguje a pro $a < -1$ diverguje.

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\,dx \stackrel{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0,1)$.[1] Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje.

Závěr: Konverguje (absolutně) pro $a > -1$.

Příklad 2 $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a\,dx$, *kde* $a \in \mathbb{R}$

Návod: Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Pro $a \neq -1$ je

$$\int x^a\,dx \stackrel{C}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

primitivní funkcí k funkci x^a na $(1,+\infty)$. Odtud je zřejmé, že pro $a < -1$ integrál konverguje a pro $a > -1$ diverguje.

Pro $a = -1$ je

$$\int \frac{1}{x}\,dx \stackrel{C}{=} \ln x$$

primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{x}$ na $(1,+\infty)$. Odtud je zřejmé, že pro $a = -1$ integrál diverguje.

Závěr: Konverguje (absolutně) pro $a < -1$.

Příklad 3 $\displaystyle\int_0^{1/e} x^a|\ln x|^b\,dx$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Návod: Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci. Navíc je spojitý na $(0, 1/e]$.

1. Uvažujme nejprve případ $a = -1$. Tedy vyšetřujeme integrál

$$\int_0^{1/e} \frac{|\ln x|^b}{x}\,\mathrm{d}x.$$

---

[1]) proto nemusíme psát ve výsledku absolutní hodnotu

Substituujeme $y = -\ln x$ a dostáváme

$$\int_1^\infty y^b \, \mathrm{d}y,$$

který konverguje právě tehdy, když $b < -1$.

2. Nechť $a > -1$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a - \varepsilon > -1$ a platí, že

$$x^a |\ln x|^b = x^{a-\varepsilon} x^\varepsilon |\ln x|^b \le x^{a-\varepsilon},$$

na nějakém intervalu $(0, m)$. Konstanta m závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x \to 0+} x^\varepsilon |\ln x|^b = 0 \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } b \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nuly , tedy interval $(0, m)$ tak, že

$$x^\varepsilon |\ln x|^b \le 1.$$

Podle srovnávacího kritéria tedy v případě, že $a > -1$ a $b \in \mathbb{R}$ integrál konverguje (absolutně).

3. Nechť $a < -1$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a + \varepsilon < -1$ a platí, že

$$x^a |\ln x|^b = x^{a+\varepsilon} x^{-\varepsilon} |\ln x|^b = x^{a+\varepsilon} \frac{|\ln x|^b}{x^\varepsilon} \ge x^{a+\varepsilon},$$

na nějakém intervalu $(0, m')$. Konstanta m' závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x \to 0+} x^{-\varepsilon} |\ln x|^b = \infty \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } b \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nuly , tedy interval $(0, m')$ tak, že

$$x^{-\varepsilon} |\ln x|^b \ge 1.$$

Podle srovnávacího kritéria tedy v případě, že $a < -1$ a $b \in \mathbb{R}$ integrál diverguje.

Příklad 4 *(a)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x} \, dx,\ a, b \in \mathbb{R}.$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x} \, dx,\ a, b \in \mathbb{R}.$

Návod: Protože integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

1. Nechť je nejprve $a > 1$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a - \varepsilon > 1$ a platí, že

$$\frac{1}{x^a \ln^b x} = \frac{1}{x^{a-\varepsilon}} \cdot \frac{1}{x^\varepsilon \ln^b x} \le \frac{1}{x^{a-\varepsilon}}$$

na nějakém intervalu $(M, +\infty)$. Konstanta M závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^\varepsilon \ln^b x} = 0 \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } b \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nekonečna, tedy interval $(M, +\infty)$ tak, že

$$\left|\frac{1}{x^\varepsilon \ln^b x}\right| = \frac{1}{x^\varepsilon \ln^b x} \leq 1.$$

Podle srovnávacího kritéria tedy v případě, že $a > 1$ a $b \in \mathbb{R}$ oba integrály konvergují (absolutně).

2. Nechť je nyní $a < 1$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a + \varepsilon < 1$ a platí, že

$$\frac{1}{x^a \ln^b x} = \frac{1}{x^{a+\varepsilon}} \cdot \frac{x^\varepsilon}{\ln^b x} \geq \frac{1}{x^{a+\varepsilon}}$$

na nějakém intervalu $(M', +\infty)$. Konstanta M' závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\varepsilon}{\ln^b x} = +\infty \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } b \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nekonečna, tedy interval $(M', +\infty)$ tak, že

$$\frac{x^\varepsilon}{\ln^b x} \geq 1.$$

Podle srovnávacího kritéria tedy v případě, že $a < 1$ a $b \in \mathbb{R}$ oba integrály divergují.

3. Nechť $a = 1$. Použijeme substituci $t = \ln x$ a dostaneme tak ekvivalentní integrály

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln^b x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$$
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^b x}\, dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$$

O prvním integrálu víme z předchozích dvou příkladů, že diverguje pro každé $b \in \mathbb{R}$.

O druhém integrálu víme z předchozích dvou příkladů, že konverguje pro $b > 1$ a diverguje v jiném případě.

Závěr: Integrál (a) konverguje (absolutně) pro $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$, jinak diverguje. Integrál (b) konverguje (absolutně) pro $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$ a pro $a = 1$, $b > 1$, jinak diverguje.

Příklad 5 *(a)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{bx}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a e^{bx}\, dx$

Návod: Protože integrand je kladný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Případ $a = b = 0$ je triviální, oba integrály divergují.

Pro $a = 0$ a $b \neq 0$ platí, že

$$\int e^{bx}\, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{bx}$$

a tudíž pro $a = 0$, $b > 0$ integrály divergují a pro $a = 0$ a $b < 0$ integrály konvergují.

Nyní bychom mohli provést substituci $t = e^x$, potom bychom dostali ekvivalentní integrály

$$\int_0^{+\infty} x^a e^{bx}\, dx = \int_1^{+\infty} \ln^a t\, t\, t^{b-1}\, dt$$

$$\int_1^{+\infty} x^a e^{bx}\,dx = \int_e^{+\infty} \ln^a t\, t^{b-1}\,dt$$

o kterých víme z předchozího příkladu, že konvergují (absolutně) pro $b-1 < -1$, tedy pro $b < 0$ a v případě (b) navíc pro $b = 0$ a $a < -1$.

Ukážeme ještě postup analogický postupu v předchozím příkladu.

1. Nechť je nejprve $b > 0$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $b - \varepsilon > 0$ a platí, že

$$x^a e^{bx} = (x^a e^{\varepsilon x})\, e^{(b-\varepsilon)x} \geq e^{(b-\varepsilon)x}$$

na nějakém intervalu $(M, +\infty)$. Konstanta M závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x\to\infty} x^a e^{\varepsilon x} = +\infty \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } b \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nekonečna, tedy interval $(M, +\infty)$ tak, že

$$x^a e^{\varepsilon x} \geq 1.$$

Podle srovnávacího kritéria (viz výsledek pro $a = 0$, $b > 0$) tedy v případě, že $a \in \mathbb{R}$ a $b > 0$ oba integrály divergují.

2. Nechť je nyní $b < 0$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $b + \varepsilon < 0$ a platí, že

$$x^a e^{bx} = \frac{x^a}{e^{\varepsilon x}}\, e^{(b+\varepsilon)x} \leq e^{(b+\varepsilon)x}$$

na nějakém intervalu $(M', +\infty)$. Konstanta M' závisí na konkrétních hodnotách b, ε, ale existuje vždy neboť

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^{\varepsilon x}} = 0 \qquad \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a } a \in \mathbb{R},$$

a tudíž podle definice limity musí existovat okolí nekonečna, tedy interval $(M', +\infty)$ tak, že

$$\frac{x^a}{e^{\varepsilon x}} \leq 1.$$

Podle srovnávacího kritéria tedy v případě, že $a \in \mathbb{R}$ a $b < 0$ oba integrály (absolutně) konvergují.

3. Pokud $b = 0$, pak víme z předchozího příkladu, že integrál (a) diverguje vždy a integrál (b) konverguje pro $a < -1$.

Příklad 6 *(a)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a}\,dx,\ a \in \mathbb{R},$ *(b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^a}\,dx,\ a \in \mathbb{R}.$

Upozornění: *chování sinu a kosinu na okolí nuly je podstatným způsobem jiné.*

Návod: Uvědomme si, že oba integrandy na $(0, 1) \subset (0, \pi/2)$ nemění znaménko a stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci.

(a) Použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

a proto platí
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin x}{x^a}}{\frac{x}{x^a}} = 1,$$
tudíž platí, že integrál (a) konverguje (absolutně), právě když konverguje integrál
$$\int_0^1 \frac{x}{x^a}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}\,dx$$
o kterém víme, že konverguje (absolutně) pro $a-1<1$, tudíž pro $a<2$.

(b) Použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1,$$
a proto platí
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{x^a}}{\frac{1}{x^a}} = 1,$$
tudíž platí, že integrál (b) konverguje (absolutně), právě když konverguje integrál
$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$$
o kterém víme, že konverguje (absolutně) pro $a<1$.

Příklad 7 *(a)* $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^a}\,dx$, *$a\in\mathbb{R}$, (b)* $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^a}\,dx$, *$a\in\mathbb{R}$.*

Návod:

(a) Nechť je $a>1$. Pak $|f(x)|\le \frac{1}{x^a}$ a tedy integrál konverguje díky srovnávacímu kritériu.

Mějme $a\le 0$. Ukážeme divergenci pomocí BC podmínky. Zvolme $\varepsilon = 2\cdot(2\pi)^{-a}$. Dále položme $x_1 = 2n\pi$ a $x_2 = (2n+1)\pi$.

Pak
$$\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a}\,\mathrm{d}x \ge \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{1}{(2n\pi)^a}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n\pi)^a}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2n\pi)^a}[-\cos x]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = \frac{2}{(2n\pi)^a} \ge \frac{2}{(2\pi)^a}.\end{aligned}$$

Nechť $0<a\le 1$. Opět ukážeme divergenci z BC podmínky. Uvažujme $x_1 = 2n\pi$ a $x_2 = 2m\pi$, kde $n<m$. Pak
$$\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \int_{2n\pi}^{2m\pi} \frac{|\sin x|}{x^a}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=n}^{m-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^a}\,\mathrm{d}x \ge \sum_{k=n}^{m-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{1}{(2(k+1)\pi)^a}|\sin x|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{(2(k+1)\pi)^a}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{4}{(2\pi)^a}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(k+1)^a}.\end{aligned}$$

Protože je ale řada $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)^a}$ divergentní, tak nesplňuje BC podmínku pro řady. Tedy existuje $\varepsilon>0$ takové, že pro všechna n_0 existuje $n>n_0$ a $m-1>n_0$ tak, že $\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(k+1)^a} > \varepsilon$.

Dohromady tedy pro původní odhad máme

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| > \frac{4}{(2\pi)^a}\varepsilon,$$

tedy integrál diverguje.

Závěr: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^a}\,dx$ konverguje právě tehdy, když $a > 1$.

(b) Postupujeme analogicky. Případně převedeme na předchozí případ pomocí vzorce $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Závěr: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^a}\,dx$ konverguje právě tehdy, když $a > 1$.

Důležité příklady – neabsolutní konvergence

Příklad 8 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ *a* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx$*, kde* $a \in \mathbb{R}$*.*

Integrály konvergují neabsolutně pro $a \in (0, 1]$. K důkazu je potřeba Abel-Dirichletova věta (která se některé semestry neprobírá).