Odmocniny

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Teorie

1. typ $R\left(x, \sqrt[m]{x+a}\right)$

   Uvažme nejprve typ $R(x, \sqrt[m]{x+a})$, kde a je reálné číslo a m přirozené číslo ostře větší než 1. V takovém případě lze použít substituci

   $$t = \sqrt[m]{x+a}$$

   s přihlédnutím ke vztahům

   $$x = t^m - a, \qquad \mathrm{d}x = mt^{m-1}\,\mathrm{d}t.$$

2. typ $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$,

   kde $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $R(x, y)$ je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integrál z racionální funkce substitucí (je-li $ad \neq bc$)

   $$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

   Odtud dostáváme, že

   $$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} := \omega(t)$$

   a následně

   $$\mathrm{d}x = \omega'(t)\mathrm{d}t = \frac{mdt^{m-1}(a-ct^m) + mct^{m-1}(dt^m - b)}{(a-ct^m)^2}\mathrm{d}t = \frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}\mathrm{d}t.$$

3. typ $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

   1. *Kvadratický trojčlen ax^2+bx+c má jeden dvojnásobný reálný kořen.*

      Začněme tím nejjednodušším případem. Pokud trojčlen ax^2+bx+c má jediný dvojnásobný kořen x_1 a $a > 0$,[1] potom se odmocniny zbavíme snadno ihned

      $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x - x_1|.$$

      Může vést na **lepení**.

[1]) jinak je odmocnina dobře definována pouze v jednom bodě

2. *Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ má dva reálné kořeny.*
   Nechť kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ má dva reálné kořeny x_1 a x_2, tedy lze psát
   $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$
   Potom integrály typu $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ lze řešit *Eulerovou substitucí*
   $$t = \sqrt{a\frac{x - x_1}{x - x_2}}, \qquad \text{odkud} \qquad x = \frac{ax_1 - x_2t^2}{a - t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2a(x_1 - x_2)t}{(a - t^2)^2}\mathrm{d}t.$$

3. *Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ nemá reálný kořen.* Pokud kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ nemá žádné reálné kořeny, pak aby odmocnina měla smysl, musí být $a > 0$. Z neexistence kořenů navíc vyplývá, že $c > 0$. Lze použít jedné z následujících dvou *Eulerových substitucí*
   $$\begin{aligned} t &= \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}, && (1) \\ xt &= \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}. && (2) \end{aligned}$$
   Například z první substituce lze vyjádřit, že
   $$\begin{aligned} t \mp x\sqrt{a} &= \sqrt{ax^2 + bx + c} \\ (t \mp x\sqrt{a})^2 &= ax^2 + bx + c \\ t^2 \mp 2tx\sqrt{a} &= bx + c \\ x &= \frac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}} \end{aligned}$$
   a odtud máme, že
   $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \mp \sqrt{a}\frac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}}.$$
   a
   $$\mathrm{d}x = \pm\frac{2(\sqrt{a}(c + t^2) \pm bt)}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\mathrm{d}t.$$

4. Existuje ještě jiná, v jednodušších případech častěji využívaná možnost, založená na transformaci kvadratického trojčlenu na kanonický tvar - *převodem na čtverec*. Následně lze užít hyperbolické nebo goniometrické substituce.

U všech typů substitucí je potřeba pečlivě zkontrolovat definiční obory a podmínky.