9. cvičení

Cíl: Ve skupině spočítat zadaný integrál a následně jej předvést u tabule, vypracovat vzorové řešení

Čas: cca 35 minut příprava, 10 minut prezentace každé skupiny

Postup: Seznamte se se vzorovými příklady, s Lemmaty 17.4 a 17.8 a připomeňte si Cauchyho větu, získané aplikujte na váš příklad

1. Převeďte na integrál typu $e^{iz}R(z)$, kde R je racionální lomená funkce
2. Najděte póly
3. Sestrojte křivku, po které budete integrovat, a použijte na ni Cauchyho větu,
4. Spočtěte jednotlivé integrály a jejich limity - jeden z Jordanova Lemmatu, dva z Lemmatu 17.8 (pozor na parametrizaci křivky, jakým obíhá směrem)
5. Sesypte to dohromady

Budete-li se nudit, zde jsou příklady ostatních skupin

Příklady

Spočtěte integrály

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)\sin \pi x}{x(x+2)} \mathrm{dx}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2+x} \mathrm{dx}$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^2-x} \mathrm{dx}$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-8)\cos \pi x}{4x^2-1} \mathrm{dx}$

Věty

Věta 17.18. (Cauchyova) *Nechť φ je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$ a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$ a holomorfní v $\operatorname{Int}\varphi$. Potom*

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = 0.$$

Lemma 17.4. (Jordanovo) Nechť pro nějaké $R_0 \geq 0$ je $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z \geq 0\} \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geq R_0\}$ a nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω. Pro $R \geq R_0$ označme Γ_R křivku $z = Re^{it}$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$[37] a $M_R = \max_{\langle \Gamma_R \rangle} |f(z)|$. Je-li $\alpha = 0$ a $RM_R \to 0$ pro $R \to +\infty$, anebo $\alpha > 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$, pak

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\,dz \to 0 \text{ pro } R \to +\infty.$$

Lemma 17.8. *Nechť má f v $z_0 \in \mathbb{C}$ jednoduchý pól. Nechť je dále $\varepsilon > 0$ dost malé, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in \langle 0, \alpha \rangle$. Pak*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\,dz = i\alpha \operatorname{Res}_{z_0} f$$

(zobecnění případu $\alpha = 2\pi$).

kde $z_1 = (1+i)/\sqrt{2}$ a $z_2 = (-1+i)/\sqrt{2}$. Rezidua určíme poměrně snadno, neboť jmenovatel má v uvažovaných bodech jednoduché nulové body. Užijeme metodu (D) a vypočteme hodnoty $1/(z^4+1)' = 1/4z^3 = z/4z^4$ v bodech z_1, z_2. Tak dostaneme

$$\frac{z}{4z^4}\bigg|_{z=z_1} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{-8}\,, \qquad \frac{z}{4z^4}\bigg|_{z=z_2} = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{-8}\,,$$

z čehož plyne, že $I = 2\pi i\sqrt{2}(-i)/4 = \pi/\sqrt{2}$. Doporučujeme čtenáři porovnat výpočet s Příkladem 8.3.12 z [V], kde se určuje primitivní funkce k f.

VZOR 1

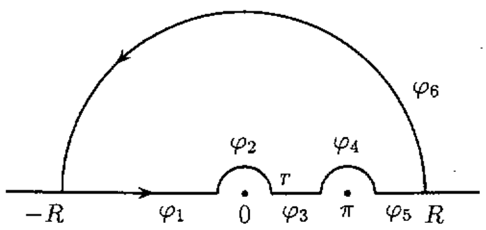
Příklad 7.4.8. V Poznámce 7.4.4 jsme předpokládali, že funkce R nemá póly na $\mathbb{R}$, avšak i případě, že R má póly v $\mathbb{R}$, může integrál z R na intervalu $(-\infty, \infty)$ existovat a lze ho již popsanou metodou *po drobné modifikaci* spočítat. Jde o integrály tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,dx\,, \quad \text{nebo} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,dx\,.$$

Aby však takový integrál existoval, musí mít funkce R pouze *jednoduché* póly a tyto navíc musí ležet v množině nulových bodů druhého faktoru integrandu. Vždy však z integrálů $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,dx$ a $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,dx$ existuje jen jeden. Speciální příklad tohoto typu jsme již spočetli v Příkladu 5.4.17. Podáme návod k řešení dalšího podobného příkladu: ukážeme, jak lze spočítat

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x(x-\pi)} = -2\,.$$

Dosud užívanou křivku (hranici půlkruhu) nahradíme křivkou znázorněnou na Obr. 7.1. Vyjádříme ji ve tvaru $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_3 \dotplus \varphi_4 \dotplus \varphi_5 \dotplus \varphi_6$.



Obr. 7.1: Křivka pro výpočet integrálu z Příkladu 7.4.8

Poznamenejme, že integrand lze spojitě rozšířit do bodů $z = 0$ a $z = \pi$, takže vyšetřovaný integrál zřejmě existuje. Pro křivku φ s $R > \pi$, $r \in (0, \pi/2)$ a funkci $f(z) = e^{iz}/z(z-\pi)$ je $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$. Poznamenejme, že f však má v bodech 0 a π póly. Limity integrálů přes φ_2 a φ_4 spočteme přímo z definice křivkového integrálu. Snadno lze též dokázat, že jsou rovny $-\pi i \cdot \operatorname{res}(f, w)$ pro $w = 0$ a $w = \pi$; póly funkce f v těchto bodech jsou jednoduché a tak snadno spočteme

$$\operatorname{res}(f, 0) = -1/\pi\,, \quad \operatorname{res}(f, \pi) = -1/\pi\,.$$

Pro imaginární části obou stran rovnosti $\int_\varphi f = 0$ dostaneme po limitním přechodu pro $R \to \infty$ a $r \to 0_+$ hledaný výsledek $I = \operatorname{Im}(\pi i(-2/\pi)) = -2$.

VZOR 2

Příklad 17.24. Spočtěme integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2-b^2}\,dx,\ a>0,\ b>0,$$

kde $\int_0^{+\infty}$ chápeme jako

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ R\to+\infty}} \left(\int_0^{b-\varepsilon} + \int_{b+\varepsilon}^{R}\right).$$

(Uvědomte si, že jednotlivé limity pro $\varepsilon \to 0+$ zde nejsou konečné, pokud není $ab = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.)

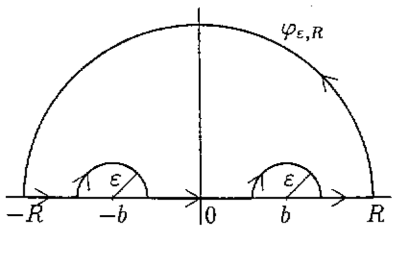
Řešení. Výpočet opět převedeme na výpočet integrálů

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2-b^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2-b^2}\,dx.$$

K výpočtu posledního uvážíme

$$\int_{\varphi_{\varepsilon,R}} \frac{ze^{iaz}}{z^2-b^2}\,dz,$$

kde křivka $\varphi_{\varepsilon,R}$ je na obrázku 17.25.



OBR. 17.25

Integrál přes velkou polokružnici konverguje k 0 pro $R \to +\infty$ podle Jordanova lemmatu. Integrály přes malé polokružničky konvergují podle lemmatu 17.8. k

$$-\pi i \operatorname{Res}_{\pm b} \frac{ze^{iaz}}{z^2-b^2}.$$

Dostáváme proto (užíváme Cauchyovu větu)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2-b^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\pi i\left(\operatorname{Res}_{+b}\frac{ze^{iaz}}{z^2-b^2} + \operatorname{Res}_{-b}\frac{ze^{iaz}}{z^2-b^2}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\pi i\left(\frac{be^{iab}}{2b} + \frac{-be^{-iab}}{-2b}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\cos ab.$$