13. cvičení

Definice 1. *Funkcionálem* rozumíme zobrazení z vektorového prostoru do $\mathbb{R}$. Příkladem je určitý Lebesgueův integrál na přímce $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (je funkcionálem z prostoru $L^1(\mathbb{R})$ do $\mathbb{R}$).

Definice 2. Funkcionál F nabývá relativního maxima (resp. minima) na množině C, pro křivku y_0, jestliže $y_0 \in C$ a $F(y) \leq F(y_0)$ (resp. $F(y) \geq F(y_0)$) pro všechna $y \in U \cap C$, kde U je nějaké okolí funkce y.

Definice 3. Nechť y je funkce definovaná na množině M. Okolí (0. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g na M, pro niž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g, |g(x) - y(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in M\} \subset U$$

Nechť y je funkce definovaná na množině M mající na M derivaci. Okolí (1. řádu) funkce y je taková množina U funkcí g mající na M derivaci, pro niž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\{g, |g(x) - y(x)| < \varepsilon, |g'(x) - y'(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in M\} \subset U$$

Věta 4. Nechť funkce $f(x, y, y')$ má spojité parciální derivace 2. řádu na intervalu $[a, b]$. Jestliže funkcionál $F(y) = \int_a^b f(x, y, y')\mathrm{d}x$ nabývá slabého relativního extrému pro funkci y_0 na množině C, je y_0 řešením rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

Uvedená rovnice se nazývá *Eulerova rovnice*. Řešení rovnice se nazývají *extremály*, jsou to obdoby kritických bodů pro extrémy funkcí reálných proměnných. V extremálách funkcionál může, ale nemusí dosahovat extrému.