Řešte diferenční rovnici $3y(t) - 4y(t-1) + y(t-2) = t$, $y(t) = 0$ pro $t < 0$.

Nejprve si uvědomíme, že

$$y(t-1) = u_1(t)y(t-1).$$

Pro $t > 1$ je to totéž, neb tam je $u_1 = 1$. Pro $t < 1$ nabývá $y(t-1) = 0$, a to z předpokladů. Analogicky

$$y(t-2) = u_2(t)y(t-2).$$

Pak použijeme Laplaceovu transformaci:

$$L(3y(t))(s) - L(4u_1y(t-1))(s) + L(u_2(t)y(t-2))(s) = L(t)(s)$$

Dostaneme

$$3L(y)(s) - 4e^{-s}L(y)(s) + e^{-2s}L(y)(s) = \frac{1}{s^2}$$

a po úpravě

$$L(y)(s) = \frac{1}{s^2(3 - 4e^{-s} + e^{-2s})},$$

což je nepříliš přátelská funkce, takže se s tím spokojíme, dopočet je následovný:

$$\begin{aligned}
L(y)(s) &= \frac{1}{s^2(3 - 4e^{-s} + e^{-2s})} \\
&= \frac{1}{2s^2}\left[\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3(1-e^{-s}/3)}\right] \\
&= \frac{1}{2s^2}\left[(1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \cdots) + (1 + \frac{e^{-s}}{3} + \frac{e^{-2s}}{3^2} + \frac{e^{-3s}}{3^3} + \cdots)\right] \\
&= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\frac{e^{-ns}}{s^2}
\end{aligned}$$

pak máme

$$y(t) = \frac{t}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[t]}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)(t-n)$$