12. cvičení

1 Teorie

Definice 1. Nechť $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkce. Její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci

$$L(f)(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t,$$

kde x je reálné číslo. (Lze ji definovat i pro čísla komplexní, čehož budeme občas využívat.)

Věta 2 (Základní věta kalkulu)**.** Nechť f je spojitá reálná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Nechť F je její neurčitý integrál na $[a, b]$. Pak

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Definice 3. Vezměme pro $a > 0$ funkci

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}; & 0 \le t \le a; \\ 0; & t > a, \end{cases}$$

Limita $\lim_{a \to 0+} f_a$ se nazývá *Diracova delta funkce* $\delta_0(t)$. Má hodnotu ∞ v 0 a 0 jinde.

$$Ł(\delta(x)) = 1.$$

Definice 4. *Konvoluce* na $(0, \infty)$ dvou funkcí f a g je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y)g(t-y)\mathrm{d}y.$$

Zřejmě $f * g$ existuje, pokud jsou obě funkce f, g po částech spojité na $(0, \infty)$.

Věta 5. Nechť f a g jsou po částech spojité a exponenciálně omezené na $(0, \infty)$. Pak

$$Ł(f * g) = Ł(f)Ł(g)$$

.

Věta 6. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \le k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$Ł_{-1}(g(z))(s) = \sum_{i=1}^n \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{xz}).$$

2 Příklady

1. Vypočítejte diferenciální rovnice a soustavy:

   (a) $y'' + y' = ku_a(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $k > 0$.

   (b) $y''' + y'' = e^t + t + 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

   (c)
   $$y'' + y = \begin{cases} \sin t; & 0 \leq t \leq \pi; \\ 0; & t > \pi, \end{cases}$$

   (d) $y' = -z$, $z' = y$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$

   (e) $y' + z' + y + z = 1$, $y' + z = e^t$, $y(0) = -1$, $z(0) = 2$

2. Vypočítejte integrální rovnice :

   (a) $\phi(t) = t^2 + \int_0^t \phi(y)\sin(t-y)\mathrm{d}y$

   (b) $\phi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-y}\phi(y)\mathrm{d}y = f(x)$

   (c) $\int_0^t y(u)y(t-u)\mathrm{d}u = 2y(t) + t - 2$

   (d) $\int_0^t y(u)y(t-u)\mathrm{d}u = 16\sin 4t$ (Netřeba dělat zpětného Laplace)

3. Vypočítejte diferenční rovnice :

   (a) $3y(t) - 4y(t-1) + y(t-2) = t$, $y(t) = 0$ pro $t < 0$.

   (b) spočtěte pomocnou úlohu k následujícímu příkladu, určete Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = r^n$, $n \leq t < n+1$.

   (c) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$