11. cvičení

1 Teorie

Definice 1. Nechť $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkce. Její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci

$$L(f)(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt} \, \mathrm{d}t,$$

kde x je reálné číslo. (Lze ji definovat i pro čísla komplexní, čehož budeme občas využívat.)

Věta 2 (Základní věta kalkulu)**.** Nechť f je spojitá reálná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Nechť F je její neurčitý integrál na $[a, b]$. Pak

$$\int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Definice 3. Vezměme pro $a > 0$ funkci

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}; & 0 \leq t \leq a; \\ 0; & t > a, \end{cases}$$

Limita $\lim_{a \to 0+} f_a$ se nazývá *Diracova delta funkce* $\delta_0(t)$. Má hodnotu ∞ v 0 a 0 jinde.

$$\mathcal{L}(\delta_0) = 1.$$

Definice 4. *Konvoluce* na $(0, \infty)$ dvou funkcí f a g je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y)g(t - y) \, \mathrm{d}y.$$

Zřejmě $f * g$ existuje, pokud jsou obě funkce f, g po částech spojité na $(0, \infty)$.

Věta 5. Nechť f a g jsou po částech spojité a exponenciálně omezené na $(0, \infty)$. Pak

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

.

Věta 6. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{Q} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \leq k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$\mathcal{L}_{-1}(g(z))(s) = \sum_{i=1}^n \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{xz}).$$

2 Příklady

1. Spočtěte Laplaceovu transformaci následujících funkcí $f(t)$, nezapomeňte na definiční obor:

   (a) $\sin(\omega t - \varphi)u_\varphi(\omega t)$ (posunutí a zvětšení)

   (b) $\sin^3 t$ (dvakrát zderivujte)

   (c) $\frac{\sin t}{t}$ (integrujte od x do ∞)

   (d) t^n, $n \in \mathbb{N}$ (integrujte od 0 do t)

   (e) $t^n e^{at}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ (derivace podle parametru a transformace exponenciály)

2. Spočtěte Laplaceovu transformaci následujících periodických funkcí $f(t)$, nezapomeňte na definiční obor:

   (a)
   $$f_a(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le 1; \\ -1; & 1 < t < 2, \end{cases}$$

   (b)
   $$f_a(t) = \begin{cases} \sin t; & 0 \le t \le \pi; \\ 0; & \pi t < 2\pi, \end{cases}$$

3. Spočtěte konvoluci funkcí $t * \sin t$.

4. Najděte vzory následujících funkcí

   (a) $\frac{1}{(s^2+1)^2}$ (Konvoluce)

   (b) $\frac{s+1}{s^2-s}$ (Rezidua)

   (c) $\frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-3s}$ (Skoková funkce)

   (d) $\frac{1}{(s+1)(s-1)^3(s^2+1)}$ (Rezidua)

   (e) $\frac{2}{s(s-1)}e^{-s}$ (Skoková funkce)

   (f) $\frac{1}{s+1}(e^{-s-1} - e^{-2s-2})$ (Skoková funkce)