# 10. cvičení

## 1 Teorie

**Definice 1.** Nechť $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkce. Její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci

$$L(f)(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t,$$

kde $x$ je reálné číslo. (Lze ji definovat i pro čísla komplexní, čehož budeme občas využívat.)

**Věta 2** (Základní věta kalkulu)**.** Nechť $f$ je spojitá reálná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Nechť $F$ je její neurčitý integrál na $[a, b]$. Pak

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

**Definice 3.** Skokovou (neboli Heavisidovu) funkci definujeme následovně:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0; & t < a; \\ 1; & t > a, \end{cases}$$

v bodě $a$ dodefinujeme libovolně, zpravidla nulou.

## 2 Příklady

Spočtěte Laplaceovu transformaci následujících funkcí $f(t)$, nezapomeňte na definiční obor:

1. 1 (z definice)
2. $e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$ (z definice)
3. $u_\tau(t)$, tzv. Heavisidova neboli skoková funkce, (z definice)
4. $\sin bt$, $b \in \mathbb{R}$ (zapište sinus pomocí komplexní exponenciály a užijte předchozí příklad)
5. $(2t + 5)e^{-2t} + 3\cos t - 2\sin 3t$ (užijte tabulky)
6. $$f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t \le 1; \\ e^{-t}; & 1 < t \le 2; \\ 0; & 2 < t; \end{cases}$$

   (zapište pomocí Heavisidovy fce a užijte vzorec pro posunutí)

7.

$$f(t) = \begin{cases} \cos t; & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}; \\ 1; & \frac{\pi}{2} < t; \end{cases}$$

(zapište pomocí Heavisidovy fce a užijte vzorec pro posunutí)

8.

$$f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le \frac{\pi}{4}; \\ \sin 2t; & \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}; \\ 0; & \frac{\pi}{2} < t; \end{cases}$$

(zapište pomocí Heavisidovy fce a užijte vzorec pro posunutí)

9. $\sin(\omega t - \varphi) u_\varphi(\omega t)$ (posunutí a zvětšení)

10. $\sin^3 t$ (dvakrát zderivujte)

11. $\frac{\sin t}{t}$ (integrujte od $x$ do $\infty$)

12. $t^n$, $n \in \mathbb{N}$ (integrujte od 0 do $t$)

13. $t^n e^{at}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ (derivace podle parametru a transformace exponenciály)