8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Lemma 1. Nechť R je racionální funkce, která nemá póly na $\mathbb{R}$ a která nabývá na $\mathbb{R}$ pouze reálných hodnot. Nechť je holomorfní na množině $D := \{z \in \mathbb{C}; \Im z \geq 0\}$ s výjimkou konečné množiny M ležící uvnitř D. Nechť $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w\in M} res_w R(z)e^{iz}$$

Lemma 2. Nechť R je racionální funkce, $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň Q je alespoň o 2 větší než stupeň P a Q nemá kořeny na reálné ose. Nechť M je množina všech kořenů Q, které mají kladnou imaginární část. Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w\in M} res_w R(z)$$

Lemma 3. Nechť Q je racionální lomená funkce, nechť izolované singulární body funkce

$$f(z) = Q\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)$$

neleží na jednotkové kružnici.

Pak

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos\varphi, \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z_k} \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right),$$

kde z_k jsou póly ležící ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice.

Příklady

1. Spočtěte integrály

   (a) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}$

   (b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi}{5+3\cos\varphi}$

   (c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{5}+2\sin\varphi}$

   (d) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $0 < a < 1$

2. Najděte inverzní funkci (resp. funkce), nezapomeňte na def. obor jak f, tak f^{-1}

   (a) $f(z) = \frac{2z+1}{z-1}$

   (b) $f(z) = iz + 1$

   (c) $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

   (d) $f(z) = \cos z$

3. Dokažte, že složením dvou lineárních lomených funkcí $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$,$c \neq 0$, vyjde opět lineární lomená nebo lineární funkce.

4. Mějme dány lineární lomenou funkci a 4 body $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_4 \neq -d/c$. Dokažte, že

$$\frac{f(z_4) - f(z_1)}{f(z_4) - f(z_2)} : \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

5. Najděte lineární lomenou funkci f takovou, že $f(0) = i$, $f(-1) = \frac{1}{2}(1 - i)$, $f(-i) = 1 + \frac{i}{2}$.

   (Hint: předchozí příklad.)

6. Pro posloupnosti komplexních čísel platí věty o aritmetice limit pro reálná čísla a navíc:

$$\lim_{n\to\infty} x_n + iy_n = a + bi$$

   právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

   a zároveň

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

   Spočtěte limity

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-ni}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} e^{ni}$