6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Bod uzávěru definičního oboru funkce f se nazývá *singulární*, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná, nebo v tomto bodě není holomorfní.

Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce $f$se nazývá *izolovaný singulární bod* (izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus w$.

Definice 2. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

1. *odstranitelná*, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n
2. *pól řádu* k, jestliže $a_k \neq 0$ a $a_n 0$ pro všechna $n < -k$
3. *podstatná*, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n.

Věta 3. Nechť w je izolovaná singularita funkce f

1. v bodě w je odstranitelná singularita, právě když $\lim_{z\to w} f(z) \in \mathbb{C}$
2. v bodě w je pól řádu , právě když $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$
3. v bodě w je podstatná singularita, právě když $\lim_{z\to w} f(z)$ neexistuje.

Věta 4. Buď $a \in \mathbb{C}$.

1. Buď f holomorfní v a, g ať má v a jednoduchý pól. Potom
$$\operatorname{res}_a(fg) = f(a)\operatorname{res}_a(g).$$
2. Nechť f, g, jsou holomorfní v a, g ať má v a jednoduchý kořen. Pak
$$\operatorname{res}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$
3. Ať f má v a pól násobnosti $n \in \mathbb{N}$. Pak
$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

Definice 5. Funkci $f(z)$ nazveme *holomorfní* v ∞, je-li funkce $f(1/z)$ holomorfní v 0. *Laurentovou řadou se středem v* ∞ rozumíme řadu
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$
přičemž její *regulární částí* rozumíme $\sum_{n=-\infty}^{0}$ (tedy tu část, která je holomorfní v ∞) a *hlavní částí* řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. *Reziduem v* ∞ rozumíme $-a_{-1}$.

Definice 6. Nechť je izolovaná singularita funkce f. *Reziduem* funkce f v bodě z_0 - píšeme $\operatorname{res}_{z_0} f$ nazýváme koeficient a_{-1} u $(z-z_0)^{-1}$ v Laurentově řadě f v bodě z_0.

Je-li ∞ izolovanou singularitou funkce f, pak reziduem v ∞ funkce f nazýváme $\operatorname{res}_\infty f = (-a_{-1})$, kde a_{-1} je koeficient u $(z-z_1)^{-1}$ v Laurentově řadě funkce f v bodě ∞. (Nezávisí na zvoleném z_1.)

Věta 7 (Reziduová)**.** Nechť Γ je jednoduše uzavřená křivka, probíhaná v kladném smyslu vzhledem ke svému vnitřku. Nechť dále jsou $a_1, a_2, \dots, a_k$ body z jejího vnitřku. Je-li f holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, pak je

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} f.$$

Věta 8. Nechť f je holomorfní v $\mathbb{C}$ až na konečně mnoho izolovaných singularit $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots k$. Pak je

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} f + \operatorname{res}_\infty f = 0.$$

Lemma 9. Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f, pak je z_0 pólem f tehdy a jen tehdy, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ a funkce h holomorfní na $U(z_0)$, $h(z_0) \neq 0$, že platí

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z),$$

pro $z \in U^*(z_0)$ (k je pak násobnost pólu).

Příklady

1. Spočtěte integrály přes křivku C zadanou předpisem:

   (a) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, $|z+1-i| = 2$

   (b) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, $|2z+3| = 2$

   (c) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, $|2z-3| = 2$

   (d) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, $x^2 + 2y^2 = 2$

   (e) $\int_C \frac{z}{z^2+4}\mathrm{d}z$, $|z-i| = 4$

   (f) $\int_C \frac{z^2}{z^3+8}\mathrm{d}z$, $|z+1+i| = 3$

   (g) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3-1)}$, $|2z-3| = 3$

   (h) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^{10}+1}$, C je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 2.

2. Rozviňte funkci v Laurentovu řadu

   (a) $f(z) = e^{1/z}$, $z_0 = \infty$

(b) $f(z) = z^2 e^{1/z}$, $z_0 = \infty$

(c) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = \infty$

(d) $f(z) = \ln \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = \infty$, (zderivujte a pak zintegrujte)

3. Najděte rezidua funkce $f(z)$ ve všech jejích singulárních bodech

   (a) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+2z+2}$

   (b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$