# 4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Věta 1.** Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z-z_0| < \rho$, diverguje pro $|z-z_0| > \rho$.

Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z-z_0| \leq r$.

**Věta 2.** Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ existuje číslo $\rho \in [0,\infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z-z_0| > \rho\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině $K$.

Platí $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

**Definice 3.** *Laurentova řada* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

První část Laurentovy řady se nazývá *regulární část*, druhá se nazývá *hlavní část*.

Laurentova řada konverguje, konvergují-li obě její části.

**Věta 4.** Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \leq r \leq R \leq \infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině $M$.

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží $M$, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

**Věta 5.** Nechť $0 \leq r \leq R \leq \infty$ a funkce $f$ je holomorfní v mezikruží $M$ o středu $z_0$ a poloměrech $r$, $R$. Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

kde $\varphi$ je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží $M$ a obsahující bod $z_0$ ve svém vnitřku.

## Příklady

1. Zjistěte obor konvergence Laurentovy řady

   (a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}(z-1)^n$

   (b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}(z-1)^n$

   (c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}(z-i)^n$

   (d) $\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$

2. Rozviňte fuknci $f(z)$ v bodě $z_0$

   (a) $f(z) = \frac{1}{1+z}$, $z_0 = 0$

   (b) $f(z) = \frac{z}{1+z}$, $z_0 = -1$

   (c) $f(z) = \frac{z}{1+z}$, $z_0 = 1$

   (d) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $z_0 = 0$ na mezikruží

   (e) $f(z) = z^2 e^{1/z}$, $z_0 = \infty$

   (f) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -2$

   (g) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -1$

   (h) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = 1$

3. Nalezněte první 4 členy Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ na množině $0 < |z| < 1$. (Hint: Rozviňte zvlášť $e^z$ a $1/(z(z^2+1))$ a pronásobte.)