__Def__ Zobr. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ nazveme

(i) __spoj. křivkou,__ je-li φ spojitá

(ii) __spoj. diferencovatelnou křivkou,__ je-li φ spoj. diferenc.

(spoj. i parc. der.)

(iii) __regulární křivkou__, je-li φ spoj. dif. po částech

__Značení__ $\langle \varphi \rangle$ graf φ $\{\varphi(t), t \in (a, b)\}$

$\varphi(a) = \varphi(b)$ __uzavřená__

__Vlastnosti__ ψ, φ křivky, f, g spoj na $\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle$

$$\int_\varphi (\alpha f + g) = \alpha \int_\varphi f + \int_\varphi g$$

$$\int_{\varphi + \psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi g$$

$$\int_{-\varphi} f = -\int_\varphi f$$

nezávisí na parametrizaci křivky

__Def__ F je __PF__ k f na ol. $G \subset \mathbb{C}$, pokud $F' = f$ na G

__Věta__ Nechť f je spoj na ol. $G \subset \mathbb{C}$. Pak

(1) f má PF na G

$\Leftrightarrow$

(2) integrál nezávisí na křivce

Pozn. Fce holomorfní na hv. konv. oblastech mají PF

$\underline{f(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad |z| \geq 1.}$ najdi obraz přímky $\underline{y = 2}$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

pak $f_1 = \frac{x}{x^2+y^2}$

$f_2 = \frac{y}{x^2+y^2}$

arg. z zůstává, jen se číslo zmenšuje

$\Rightarrow$ body z jednotkové kružnice zůstanou

body větší půjdou dovnitř a naopak

nechť $y = 2$, pak

$f_1 = \frac{x}{x^2+4}$

$f_2 = \frac{2}{x^2+4}$

$$\underbrace{f_1^2 + f_2^2}_{|\ \ |^2} = \frac{x^2+4}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{2} f_2$$

pak $f_1^2 + \left(f_2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

kružnice o středu $(0, \frac{1}{4})$ a $r = \frac{1}{4}$

<u>kruhová inverze</u>

$$\int_{\varphi} \frac{dz}{z^2+1} \qquad \varphi: \ |z-1+i| = 2$$

$$\int_{\varphi} \frac{1}{(z-i)(z+i)} =$$

$z_0 = -i \qquad f(z) = \frac{1}{z-i}$ holom. uvnitř $\langle \varphi \rangle$

$$= \int_{\varphi} \frac{\frac{dz}{z-i}}{z+i} = 2\pi i \frac{1}{-i-i} = -\pi$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)^2} \quad \text{DÚ}$$

$$\int_{\varphi} \frac{\sin 2z}{z^2} \qquad \varphi: |z| = 1$$

$f(z) = \sin 2z \qquad z_0 = 0$

holom.

$n=1$ zobecnění vzorce

$$\int \frac{\sin 2z}{z^2} dz = 2\pi i \, f'(0) = 2\pi i \; 2\cos 0 = 4\pi i$$

$$\int_{\varphi} \frac{\sin z}{z^4} dz \qquad |z-i| = 2$$

$f(z) = \sin z \qquad z_0 = 0$

$n = 3$

$$\int_{\varphi} \frac{\sin z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{2\pi i}{6}(-\sin 0) = \frac{-\pi i}{3}$$

( ) Najděte holom. fci $f(z)$, která má imag. část $f_2 = x + y - 3$

a $\underline{f(0) = -3i}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad f_1(x,y) = x + c(y)$$

$$c'(y) = \frac{\partial f_1}{\partial y} = -1 = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$\Rightarrow \quad c'(y) = -1$

$c(y) = -y + k$

tedy $\quad f_1(x) = x - y + k$

pak

$$f = f_1 + i f_2 = x - y + k + ix + iy - 3i$$

$$-3i = f(0) = k - 3i$$

$\Rightarrow \quad k = 0$

tedy $\quad \underline{f(z) = z + iz - 3i}$

- 1. kvadrant

  $\mathrm{Re}\, z > 0$ & $\mathrm{Im}\, z > 0$

- vnitřní oblast kružnice, střed v 1-i a dotýká se Re osy

  $r = 1$

  $|z - 1 + i| < 1$

- Množina kružnic, které se dotýkají Im osy v počátku
  → střed na Re ose

  $|z - a| = |a| \qquad a \in \mathbb{R}$

$\underline{f(z) = e^z}$ $\quad -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$

rovnoběžky

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$|e^z| = e^x$, y určuje argument

pro přímku $x = c$ $\Rightarrow$ <u>kružnice</u> $S = (0,0)$, $r = e^c$

$y = c$ $\Rightarrow$ <u>polopřímka</u> bodů s tímto argumentem

$\boxed{\int_{\varphi} \operatorname{Re} z \, dz}$ $\quad \varphi$ je kl. or. kružnice $|z| = r$

$\varphi(t) = r e^{it} \qquad t \in (0, 2\pi)$

$\varphi'(t) = i r e^{it}$

$$\int_0^{2\pi} (r \cos t)(i r e^{it})\, dt = i r^2 \int_0^{2\pi} \cos t \, (\cos t + i \sin t) =$$

$$= i r^2 \int \cos^2 t + i \cos t \sin t = i r^2 \left(\left[-\tfrac{1}{2} \cos^2 t \right]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2t \, dt \right)$$

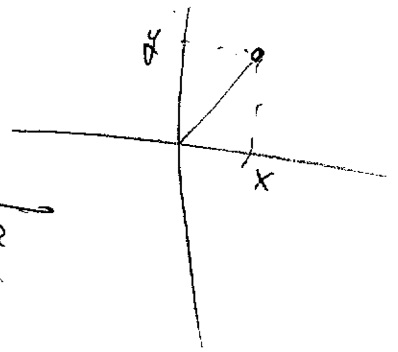
$$= i r^2 \left(0 + \tfrac{1}{2} \left[t + \tfrac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} \right) = \underline{\underline{i r^2 \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi}} + 0$$

$\boxed{\int |z|^2}$ $\quad \ell$ je orient. úsečka z $z_1 = 1+i$ a $z_2 = -1+3i$

$$z_2 - z_1 = -2 + 2i$$

$$\varphi(t) = 1+i + t(-2+2i) \qquad t \in \langle 0,1 \rangle$$
$$= 1-2t + i(1+2t)$$
$$\varphi'(t) = -2+2i$$

$$\int_\varphi |z|^2 \, dz = \int_0^1 \left((1-2t)^2 + (1+2t)^2\right) \cdot (-2+2i) \, dt =$$
$$= 2(-1+i) \int_0^1 1 - \cancel{4t} + 4t^2 + 1 + 4t^2 + \cancel{4t} \, dt =$$
$$= 2(-1+i) \int 2 + 8t^2 \, dt = 2(-1+i) \left[2t + \frac{8}{3}t^3\right]_0^1 =$$
$$= \underline{\underline{2(-1+i)\left(2+\frac{8}{3}\right)}} = \underline{\underline{\frac{28}{3}(i-1)}}$$



$\sqrt{y^2+x^2}$

$\boxed{\int z^2}$ oblouk paraboly $y = 1 - x^2$

$z_1 = -1$

$z_2 = 1$

$PF = \frac{z^3}{3}$

$\int z^2 \, dz = F(1) - F(-1) = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$\boxed{\int z^2 \, dz}$ ℓ obvod $\square$ $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -1-i$

fce je holomorfní v $\mathbb{C}$, kř. je uz. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\int = 0}}$

(ověřit)

$\boxed{\int_\varphi \frac{dz}{z}}$ φ je $|z| = 1$

$\varphi(t) = e^{it}$

$\varphi'(t) = i e^{it}$

$\int_\varphi \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}} = \underline{\underline{2\pi i}}$

$\displaystyle \boxed{\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-i}}$ $\qquad \mathcal{C}$ = kružnice $\quad |z| = \frac{1}{2}$

Cauchy th. $\Rightarrow \underline{\int = 0}$

Lze se na to dívat jako na C. vzorec

$\displaystyle \int_{\varphi} \frac{dz}{z-i} \qquad |z-i| = \frac{1}{2}$

fce není holomorfní v bodě $z_0 = i$, který je "uvnitř" křivky, tedy nutno přímo

$\varphi = i + \frac{1}{2}e^{it} \qquad t \in (-\pi, \pi)$

$\varphi' = \frac{1}{2}ie^{it}$

$\Rightarrow$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{1}{2}ie^{it}}{\frac{1}{2}e^{it}}\,dt = i\int_{-\pi}^{\pi} dt = \underline{2\pi i}$$

$$\boxed{\int_{\varphi} \frac{e^z}{z-1}\, dz} \qquad \varphi = \quad |z-1| = 1$$

$f(z) = e^z \qquad z_0 = 1$

holomorfní, z_0 je uvnitř

ze vzorce :

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{e^z}{z-1} \implies \underline{\underline{e \cdot 2\pi i = \int_{\varphi} \frac{e^z}{z-1}}}$$

$$\boxed{\int_{\varphi} \frac{z^2+2z+2}{z+2}\, dz} \qquad \varphi : |z| = 3$$

$\varphi(z) = z^2+2z+2$ holomorfní $\mathbb{C}$

$z_0 = -2$ uvnitř $\langle \varphi \rangle$

$$\implies 2\pi i \left((-2)^2 + 2(-2) + 2\right) = \int \quad dz$$

$$\underline{\underline{2\pi i \cdot 2}} \quad =$$

$$\boxed{\int_{\varphi} \frac{\cos z}{z-i}\, dz} \qquad |z+1+i| = 2$$

$f(z) = \cos z$ holom na $\mathbb{C}$

$z_0 = i$

z_0 leží vně $\langle \varphi \rangle$, tedy $\underline{\underline{\int = 0}}$

$$\boxed{\int_{\varphi} \frac{1}{z \cdot \cos z}\, dz} \qquad \varphi : |z| = 1$$

$f(z) = \frac{1}{\cos z} \qquad z_0 = 0$

$f(z)$ holomorfní kromě bodů $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ovšem $|z_k| > 1 \implies f(z)$ holomorfní uvnitř 1-kružnice

$\implies$ Cauchy vzorec

$$\underline{\underline{\int = 2\pi i \frac{1}{\cos(0)} = 2\pi i}}$$

$$\boxed{\int_{C} \bar{z}\, dz}$$

úsečka ze $z_1 = 1 - i$ $\quad z_2 = 2 + i$

$$z_2 - z_1 = 1 + 2i$$

$$\varphi(t) = 1 - i + t(1 + 2i)$$

$$= \underbrace{1 + t}_{\varphi_1} + i\underbrace{(-1 + 2t)}_{\varphi_2} \qquad t \in (0, 1)$$

$$\varphi'(t) = 1 + 2i$$

$$\int_0^1 \left[(1 + t) - (-1 + 2t)\right](1 + 2i) = (1 + 2i)\int_0^1 (2 - t)\, dt = (1 + 2i)\left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$= (1 + 2i)\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}(1 + 2i)}}$$