3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Cauchy)**.** Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce φ a na jejím vnitřku. Pak

$$\int_{\varphi} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Věta 2 (Cauchyův vzorec)**.** Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce φ a na jejím vnitřku. Pak pro každý bod w ležící ve vnitřku φ platí

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z = f(w).$$

Důsledek 3. Nechť f je holomorfní na jednoduché uzavřené křivce φ a na jejím vnitřku. Pak f má na vnitřku φ derivace všech řádů a pro každý bod w ležící ve vnitřku φ platí

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\mathrm{d}z = f^{(n)}(w).$$

Příklady

1. Vypočítejte křivkový integrál
   (a) $\int_{\varphi} \overline{z}\mathrm{d}z$, φ je úsečka z $z_1 = 1-i$ do $z_2 = 2+i$.
   (b) $\int_{\varphi} |z|^2\mathrm{d}z$, φ je úsečka z $z_1 = 1+i$ do $z_2 = -1+3i$.
   (c) $\int_{\varphi} \Re z\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaná kružnice $|z| = r$.
   (d) $\int_{\varphi} z^2\mathrm{d}z$, φ je oblouk paraboly $y = 1-x^2$, mezi body $z_1 = -1$, $z_2 = 1$.
   (e) $\int_{\varphi} z^2\mathrm{d}z$, φ je obvod obdélníka s vrcholy $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -1-i$.
   (f) $\int_{\varphi} \frac{\mathrm{d}z}{z}$, $\varphi = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
   (g) $\int_{\varphi} \frac{\mathrm{d}z}{z-i}$, φ je kružnice $|z| = \frac{1}{2}$.
   (h) $\int_{\varphi} \frac{\mathrm{d}z}{z-i}$, φ je kružnice $|z-i| = \frac{1}{2}$.
2. Vypočítejte křivkový integrál, pokud to lze, užijte Cauchyův vzorec
   (a) $\int_{\varphi} \frac{e^z}{z-1}\mathrm{d}z$, $\varphi = \{z \in \mathbb{C}, |z-1| = 1\}$.
   (b) $\int_{\varphi} \frac{z^2+2z+2}{z+2}\mathrm{d}z$, $\varphi = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 3\}$.
   (c) $\int_{\varphi} \frac{\cos z}{z-i}\mathrm{d}z$, $\varphi = \{z \in \mathbb{C}, |z+1+i| = 2\}$

(d) $\int_\varphi \frac{1}{z\cos z}\mathrm{d}z$, $\varphi = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

(e) $\int_\varphi \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z$, $\varphi = \{z \in \mathbb{C}, |z-1+i| = 2\}$

(f) $\int_\varphi \frac{sin2z}{z^2}\mathrm{d}z$, $\varphi = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

3. (a) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, $|z| \geq 1$, určete, kam se zobrazí přímka $y = 2$.

   (b) $f(z) = e^z$, $-\pi < \Im z \leq \pi$, určete, kam se zobrazí přímky rovnoběžné se souřadnými osami

4. Najděte holomorfní funkci, která má imaginární část rovnu $x+y-3$ a $f(0) = -3i$.

5. Dokažte, že $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

6. Popište množiny

   (a) Vnitřek 1. kvadrantu

   (b) Vnitřní oblast kružnice se středem v $1-i$, která se dotýká reálné osy

   (c) Množina kružnic, které se dotýkají imaginární osy v počátku