1. Vypočítejte integrál přes množinu

$$\int_M \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}V$$

kde $M = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1; x^2+y^2 \leq z^2\}$.

Volíme sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos\gamma\cos\beta \\ y &= r\cos\gamma\sin\beta \\ z &= r\sin\gamma, \end{aligned}$$

$|J| = r^2\cos\gamma$.

z první rovnice získáme $r < 1$, z druhé

$$\cos^2\gamma \leq \sin^2\gamma,$$

tedy

$$\gamma \in (\pi/4, 3\pi/4).$$

Celkem máme

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{r|\cos\gamma|}{r} r^2 \cos\gamma \,\mathrm{d}\gamma \mathrm{d}\beta \mathrm{d}r =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\gamma r^2 \,\mathrm{d}\gamma \mathrm{d}\beta \mathrm{d}r - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos^2\gamma r^2 \,\mathrm{d}\gamma \mathrm{d}\beta \mathrm{d}r.$$

Nyní je jen potřeba vyjádřit $cos^2\gamma = (1+\cos 2\gamma)/2$. Výsledkem je číslo $(\pi^2 - \pi)/6$.

Příklad šel řešit i přes cylindrické souřadnice, pak ovšem bylo třeba rozseknout obrázek na dvě půlky a přizpůsobit tomu meze.

2. Spočtěte kř. integrál 1. druhu

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

přes křivku C $(2\cos t; 2\sin t; t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Máme $c'(t) = (-2\sin t; 2\cos t; 1)$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$$

integrál vyjde

$$\int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + 4\sin^2 t + t^2)\sqrt{5}\mathrm{d}t = 8\sqrt{5}(\pi + \frac{\pi^3}{3}).$$

3. Spočtěte kř. integrál 1. druhu

$$\int_C (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$$

přes křivku C, která omezuje část sféry $x^2 + y^2 + z^2$; $x, y, z \geq 0$.

nakreslíme si obrázek, získáme osminu koule. Ta je omezena třemi čtvrtkružnicemi a souřadnými rovinami. Rovnice čtvrtkružnic je tedy

$$\begin{aligned} x &= \cos\beta \\ y &= \sin\beta \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \cos\beta \\ z &= \sin\beta \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \cos\beta \\ z &= \sin\beta \\ x &= 0 \end{aligned}$$

vždy $\beta \in (0, \pi/2)$, neb je to čtvrtkruh.

Sestavíme integrál pro 1. případ, ostatní analogicky. A získáme

$$\int_0^{\pi/2} 0i + \sin^2\beta(-\sin\beta) + (-\cos^2\beta)\cos\beta\,\mathrm{d}\beta.$$

Rozložíme na

$$\sin^3\beta = \sin(1 - \cos^2\beta)$$

a hravě vyřešíme, vyjde $-4/3$, opakujte třikrát.