PLOCHY

Plocha je množina $\{(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v)); (u,v) \in I\}$, kde $\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.

Předchozí plocha se nazývá *uzavřená*, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.

Plocha zadaná parametry $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\tau(u,v)$ na intervalu I se nazývá hladká, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I;
2. pro každé $(u,v) \in I$ má matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$
hodnost 2;
3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u,v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.

Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v $\mathbb{R}^3$ (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.

Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.

Po částech hladká plocha P, parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I, se nazývá jednoduše uzavřená jestliže Φ je prosté na vnitřku I, konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I.

Jednoduše uzavřená plocha P rozděluje prostor na dvě souvislé části, jednu omezenou, zvanou vnitřek (značení ιP) a druhou neomezenou.

Orientace plochy znamená, že lze mluvit o dvou stranách plochy, jedna se označí za kladnou a druhá za zápornou.

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.

U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.

U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P, říká se, že obě orientace jsou souhlasné, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.

Nebude-li řečeno jinak, bude se vždy předpokládat, že plochy a jejich kraje jsou orientovány souhlasně.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

DEFINICE. Nechť f je funkce zadaná na hladké ploše P, na které je v každém bodě $\cos\gamma \neq 0$. Pak se definuje plošný integrál 1.druhu funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S)\ \mathrm{d}S = \int_M f(S) \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}.$$

POZOROVÁNÍ. Následující 2 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.

1. $\int_P (\alpha f(S) + \beta g(S))\ \mathrm{d}S = \alpha \int_P f(S)\ \mathrm{d}S + \beta \int_P g(S)\ \mathrm{d}S$;
2. $\int_{P_1+P_2} f(S)\ \mathrm{d}S = \int_{P_1} f(S)\ \mathrm{d}S + \int_{P_2} f(S)\ \mathrm{d}S$;
3. $|\int_P f(S)\ \mathrm{d}S| \leq O(P) \max_{S\in P} |f(S)|$, kde $O(P)$ je obsah plochy P.

PLOCHY

Plocha je množina $\{(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)); (u,v) \in I\}$, kde $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ jsou reálné spojité funkce definované na nějakém omezeném intervalu I v rovině.

Předchozí plocha se nazývá *uzavřená*, jestliže I je uzavřený a všechny body z hranice I se zobrazí do jediného bodu.

Plocha zadaná parametry $\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v)$ na intervalu I se nazývá hladká, jestliže platí:

1. funkce φ, ψ, τ mají spojité první parciální derivace na I;
2. pro každé $(u,v) \in I$ má matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\tau}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\tau}{\partial v} \end{pmatrix}$$
hodnost 2;
3. každý bod plochy je obrazem jediného bodu $(u,v) \in I$ s jedinou možnou výjimkou: obrazy bodů z hranice I mohou splývat.

Kraj plochy se někdy nazývá hranice, ale pak je nutné odlišovat hranici plochy v $\mathbb{R}^3$ (to je obvykle celá plocha) a hranici, která se tu nazývá kraj.

Plocha s prázdným krajem je totéž, co uzavřená plocha.

Po částech hladká plocha je spojení konečně mnoha hladkých ploch.

Po částech hladká plocha P, parametricky zadaná zobrazením Φ na uzavřeném intervalu I, se nazývá jednoduše uzavřená jestliže Φ je prosté na vnitřku I, konstantní na hranici I s hodnotou různou od hodnot na vnitřku I.

Jednoduše uzavřená plocha P rozděluje prostor na dvě souvislé části, jednu omezenou, zvanou vnitřek (značení ιP) a druhou neomezenou.

Orientace plochy znamená, že lze mluvit o dvou stranách plochy, jedna se označí za kladnou a druhá za zápornou.

Je-li plocha orientována, normála vždy směřuje nad kladnou stranu.

U jednoduše uzavřených ploch, pokud není stanoveno jinak, se za kladnou stranu bere vnější strana a normála tedy směřuje ven, nikoli dovnitř.

U grafů funkcí dvou proměnných se za kladnou stranu bere horní strana.

Orientace hladké plochy znamená, že v každém jejím bodě je určen směr normály a to spojitým způsobem: jestliže půjdete po jednoduše uzavřené křivce na dané ploše, musíte dojít do výchozího bodu ve stejné poloze.

Je-li orientovaná křivka C částí kraje orientované plochy P, říká se, že obě orientace jsou souhlasné, jestliže při chůzi po křivce v kladném směru a po kladné straně plochy, máte plochu po levé straně.

Nebude-li řečeno jinak, bude se vždy předpokládat, že plochy a jejich kraje jsou orientovány souhlasně.

PLOŠNÉ INTEGRÁLY 1.DRUHU

DEFINICE. Nechť f je funkce zadaná na hladké ploše P, na které je v každém bodě $\cos\gamma \neq 0$. Pak se definuje plošný integrál 1.druhu funkce f přes plochu P jako

$$\int_P f(S)\, \mathrm{d}S = \int_M f(S) \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{|\cos\gamma|}.$$

POZOROVÁNÍ. Následující 2 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.

1. $\int_P (\alpha f(S) + \beta g(S))\, \mathrm{d}S = \alpha \int_P f(S)\, \mathrm{d}S + \beta \int_P g(S)\, \mathrm{d}S$;
2. $\int_{P_1+P_2} f(S)\, \mathrm{d}S = \int_{P_1} f(S)\, \mathrm{d}S + \int_{P_2} f(S)\, \mathrm{d}S$;
3. $|\int_P f(S)\, \mathrm{d}S| \leq O(P) \max_{S\in P} |f(S)|$, kde $O(P)$ je obsah plochy P.

VĚTA. Nechť plocha P je grafem funkce $h(x,y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,.$$

VĚTA. Nechť je plocha P dána parametricky rovnostmi $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v), z=\tau(u,v)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{J(\varphi,\psi)}\,,$$

kde

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2\\
G &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2\\
F &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\tau v}\,.
\end{aligned}$$

a $J(\varphi,\psi)$ je Jakobián funkcí φ,ψ.

VĚTA. Nechť f je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce h definované na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\ \mathrm{d}S = \int_A f(x,y,h(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ,ψ,τ na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\ \mathrm{d}S = \int_A f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))\sqrt{EG-F^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,.$$

VĚTA. Nechť plocha P je grafem funkce $h(x,y)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,.$$

VĚTA. Nechť je plocha P dána parametricky rovnostmi $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v), z=\tau(u,v)$. Potom

$$\frac{1}{|\cos\gamma|}=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{J(\varphi,\psi)}\,,$$

kde

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)^2\\
G &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)^2\\
F &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\tau v}\,.
\end{aligned}$$

a $J(\varphi,\psi)$ je Jakobián funkcí φ,ψ.

VĚTA. Nechť f je funkce definovaná na hladké ploše P.

1. Nechť je plocha P grafem funkce h definované na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\ \mathrm{d}S=\int_A f(x,y,h(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

2. Nechť je plocha P určena parametricky funkcemi φ,ψ,τ na množině A. Pak

$$\int_P f(S)\ \mathrm{d}S=\int_A f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\tau(u,v))\sqrt{EG-F^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\,.$$