Kapitola 1

Číselné řady

Problém sčítání nekonečně mnoha čísel se objevil již ve starověkém Řecku. Známý je například Zenonův paradox o *Achillovi a želvě*. Achilles závodí se želvou na atletickém stadionu, a protože ví, že dokáže běžet desetkrát rychleji než želva, dá jí náskok jednoho oválu. Zenonova otázka zněla, kdy Achilles želvu dožene.

Z čistě fyzikálního hlediska tento problém vede na jednoduchou lineární rovnici. Ve chvíli, kdy Achilles želvu dožene, musí urazit dráhu o jeden ovál delší než ona. Tudíž, měříme-li dráhu želvy s počtem oválů, její rychlost označíme v a čas, kdy ji Achilles dožene, označíme jako t, pak pro dráhu želvy uraženou v tomto čase platí

$$s = v \cdot t$$

a pro dráhu Achilla běžícího rychlostí $10v$

$$s + 1 = 10v \cdot t$$

neboť urazil o jeden ovál navíc. Po dosazení za s z první rovnice můžeme vyjádřit

$$vt + 1 = 10vt,$$

odkud vyplývá, že

$$t = \frac{1}{9v}.$$

Achilles tedy podle tohoto výpočtu želvu dožene.

Zenon ovšem svým žákům předložil následující argument. Aby Achilles želvu dohnal, musí nejprve oběhnout ovál, který na želvu na počátku ztrácí. Během této doby ovšem želva také něco uběhne, konkrétně desetinu oválu. Achilles tuto desetinu musí uběhnout, ale želva během této doby odeběhne zase o kousek dál. A takto docházíme k závěru, že Achilles želvu *stále* honí, neboť vždy, když dorazí na místo, kde byla před chvílí, je již želva zase o kus dál. Achilles tedy želvu, zdá se, doběhnout nemůže.

Jak lze tento Zenonův argument „vyvrátit“? Spočtěme podle jeho návodu, jaký čas Achilles potřebuje na dohnání želvy. Nejprve musí oběhnout jeden ovál, což mu zabere čas

$$t_1 = \frac{1}{10v} = 0,1v.$$

Želva se mu mezitím vzdálí o desetinu oválu, na jehož překonání potřebuje další čas

$$t_2 = \frac{0,1}{10v} = 0,01v.$$

Želva se mu mezitím opět vzdálí o desetinu desetiny oválu, tedy o jeho jednu setinu. Na překonání této vzdálenosti potřebuje Achilles další čas

$$t_3 = \frac{0,01}{10v} = 0,001v.$$

Pokračujeme-li stejnou úvahou dále, zjišťujeme, že Achilles na dohnání želvy potřebuje čas

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = 0,1v + 0,01v + 0,001v + \ldots$$

Otázka zní, zda je tento součet opravdu *nekonečný*, jak tvrdí Zenon. Pokud z výrazu na pravé straně vytkneme v, dostáváme součet desetinných čísel

$$t = v \cdot (0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots) .$$

Zkusme je postupně sčítat:

$$\begin{aligned} 0,1 + 0,01 &= 0,11 \\ 0,11 + 0,001 &= 0,111 \\ 0,111 + 0,0001 &= 0,1111 \\ 0,1111 + 0,00001 &= 0,11111 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vidíme, že postupným přičítáním dostáváme číslo, které jsme zvyklí zapisovat jako $0,\overline{1}$ (nula celá jedna periodicky). Dokonce víme, že každé reálné číslo s neukončeným periodickým desetinným rozvojem odpovídá nějakému zlomku a tento zlomek umíme najít. Označíme-li $a = 0,\overline{1}$, potom $10a = 1,\overline{1}$, a tedy

$$10a - a = 1,\overline{1} - 0,\overline{1} = 1,$$

tudíž $9a = 1$, a tedy

$$a = \frac{1}{9}$$

Výsledný čas potřebný na dohnání želvy tedy je

$$t = v \cdot (0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots) = v \cdot 0,\overline{1} = v \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}v.$$

Výsledek nám tedy vyšel stejný jako při použití fyzikálních úvah, kterými jsme úlohu řešili nejprve.

Z úlohy vyplývá návod, jak zkusit definovat součet nekonečně mnoha čísel. Budeme prostě postupně přičítat jedno číslo po druhém a zjišťovat, jak se tento postupný součet chová. Může například růst nade všechny meze, tak tomu je například při opakovaném přičítání jedničky. Nebo klesat pod každou mez, například při opakovaném přičítání minus jedničky. Nebo, jak tomu bylo v naší úloze, se tento součet *blíží* nějakému konečnému číslu, které pak logicky nazveme součtem všech těchto čísel. Anebo, jak uvidíme, nemusí nastat ani jeden z předchozích případů. Matematicky všechny tyto úvahy formalizujeme pomocí nám již známého pojmu limity.

1.1 Definice číselné řady. Součet řady

Jestliže (a_k) je posloupností čísel, potom číselnou řadou nazýváme formální symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \text{in infinitum} \qquad \text{nebo} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Slova in infinitum znamenají latinsky do nekonečna, často je v zápisu vlevo vynecháváme. Jednotlivé prvky posloupnosti a_k nazýváme souhrnně **koeficienty** řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, samotné číslo a_k pak **k-tým koeficientem** řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Číselnou řadou tedy rozumíme úlohu „najít součet“nekonečně mnoha čísel, které jsou uspořádané do nějaké posloupnosti.[1]

Definice 1.1. Mějme posloupnost reálných nebo komplexních čísel $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Součet prvních n prvků této posloupnosti označujeme jako s_n a nazýváme **n-tým částečným součtem řady** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.[2] Je tedy

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Částečné součty řady tvoří posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Jestliže existuje limita této posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

[1]) Důvodem, proč bereme posloupnost namísto nekonečného souboru čísel, je, že při sčítání nekonečně mnoha čísel může výsledný „součet“záviset na pořadí sčítanců. Mluví o tom mimo jiné *Riemannova věta.*

[2]) Čti: „suma pro ká jdoucí od jedné do nekonečna á ká“.

potom ji nazýváme **součtem řady** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. V takovém případě obvykle symbolem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

označujeme jak řadu, tak i její součet.

Víme, že limita posloupnosti existovat nemusí, což naznačuje, že ne každá řada musí mít definován součet. Limita posloupnosti částečných součtů také může být nevlastní, tj. $+\infty$ nebo $-\infty$ v případě reálných čísel nebo ∞ v případě čísel komplexních. Potom, v souladu s definicí, pokládáme tuto nevlastní limitu za součet příslušné řady. Tři příklady níže ukazují, že všechny tyto případy opravdu mohou nastat.[3]

Předtím ještě poznamenejme, že někdy se hodí zapisovat také částečný součet řady pomocí symbolu suma. V takovém případě pro n-tý částečný součet můžeme psát

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Příklady 1.2. (a) Součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ je $+\infty$. Koeficienty řady jsou $a_k = 1$, n-tý částečný součet je tedy tvořen součtem n jedniček, jak je vidět z vyjádření $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1$. Je tedy $s_n = n$, a tudíž

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

(b) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ nemá definován součet. Pro posloupnost částečných součtů totiž máme

$$s_1 = -1, \quad s_2 = (-1) + 1 = 0, \quad s_3 = (-1) + 1 + (-1) = -1, \quad s_4 = (-1) + 1 + (-1) + 1 = 0$$

a tak dále. Indukcí lze lehko dokázat, že $s_{2n+1} = -1$ a $s_{2n} = 0$ pro jakékoliv n přirozené. Tudíž z posloupnosti (s_n) lze vybrat dvě podposloupnosti (lichých a sudých členů), které mají dvě různé limity, a tudíž limita posloupnosti (s_n) nemůže existovat.

(c) Řadu

$$0,1 + 0,01 + 0,001 + \cdots \text{ in infinitum},$$

jsme vyšetřovali v úvodní ilustrační úloze, kde jsme dospěli k závěru, že jejím součtem je číslo $0,\overline{1} = \frac{1}{9}$. Ukážeme, že tomu tak je i podle zvolené definice součtu řady.[4]

Koeficienty řady jsou postupně $a_1 = 0,1 = 10^{-1}$, $a_2 = 0,01 = 10^{-2}$ a tak dále, tedy $a_k = 10^{-k}$. Pro n-tý částečný součet tedy máme

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0,\underbrace{1111\ldots1}_{n \text{ jedniček}}$$

a stačí tedy dokázat, že limitou posloupnosti (s_n) je číslo $\frac{1}{9}$. K tomu lze využít přímo definice limity. Platí, že

$$\left| s_n - \frac{1}{9} \right| = |s_n - 0,\overline{1}| = 0,\underbrace{0000\ldots0}_{n \text{ nul}}1111\ldots < 10^{-n}.$$

Protože pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $10^{-n_0} < \varepsilon$, vyplývá odtud, že pro $n > n_0$ je $|s_n - \frac{1}{9}| < \varepsilon$. Podle definice limity je tudíž

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{9}.$$

[3]) Připomeňme, že v případě komplexní posloupnosti (a_n) klademe $\lim a_n = \infty$, právě když $\lim |a_n| = +\infty$. Jestliže tedy řada reálných čísel má součet $+\infty$ nebo $-\infty$, pak, bereme-li ji jako řadu čísel komplexních, má v komplexních číslech v obou případech součet ∞, neboť v komplexních číslech obvykle neuvažujeme uspořádání. Navíc se může stát, že v komplexních číslech řada součet má, zatímco v reálných číslech nikoliv. Viz úlohu I.1.

[4]) Striktně vzato v tuto chvíli ještě nemáme zavedené nekonečné desetinné rozvoje – ty se právě zavádí pomocí teorie číselných řad. Jakékoliv desetinné číslo s periodickým rozvojem nicméně lze ztotožnit s nějakým zlomkem a na desetinná čísla s periodickým rozvojem lze také přirozeným způsobem rozšířit běžnou aritmetiku a uspořádání desetinných čísel s konečným rozvojem. V tomto příkladu nám to usnadní a zpřehlední výpočty. Pokud by čtenář přesto nechtěl nekonečné desetinné rozvoje používat, nechť si příslušné výpočty přepíše pomocí zlomků.

Úlohy

Úloha I.1. Ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k$ má v komplexních číslech součet ∞, zatímco v reálných číslech není její součet definován.

Řešení. Označme $a_k = (-1)^k k$. Pro částečné součty máme

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1+2 = 1, \quad s_3 = -1+2-3 = -2, \quad s_4 = -1+2-3+4 = 2,$$

odkud vidíme, že zřejmě $s_{2n} = n$ a $s_{2n-1} = -n$, kdykoliv n je přirozené číslo. Pro úplnost tuto hypotézu dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ toto tvrzení platí podle výpočtů výše. Předpokládejme, že platí pro n a dokazujme jej pro $n+1$. Potom

$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = n - (n+1) + (n+2) = n+1,$$

kde jsme využili indukční předpoklad, že $s_{2n} = n$. Podobně máme

$$s_{2(n+1)-1} = s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} = -n + n - (n+1) = -n-1 = -(n+1)$$

a tvrzení o částečných součtech je tedy dokázáno matematickou indukcí.

Tudíž vidíme, že v reálných číslech

$$s_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty, \qquad s_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty,$$

a tedy posloupnost (s_n) nemá v reálných číslech limitu, protože má dvě podposloupnosti mající různé limity. Tudíž vyšetřovaná řada nemá v oboru reálných čísel definován součet.

Protože je ale $|s_{2n}| = n$ a $|s_{2n-1}| = n$, je zřejmé, že posloupnost absolutních hodnot částečných součtů má tvar

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$$

a tedy že $\lim |s_n| = +\infty$. Podle definice komplexní nevlastní limity je $\lim s_n = \infty$, pokud posloupnost s_n bereme jako posloupnost komplexních čísel. □

1.2 Nutná podmínka konvergence řady. Harmonická řada

V předchozí části jsme ukázali, že řada může mít jako svůj součet reálné (či komplexní) číslo, nevlastní body reálné přímky $\pm\infty$ (či nevlastní bod komplexní roviny ∞), anebo vůbec nemusí mít součet definován.

Definice 1.3. Řekneme, že řada reálných (nebo komplexních) čísel je **konvergentní**, jestliže limita částečných součtů má **vlastní limitu**. Tedy řada je konvergentní, jestliže jejím součtem je reálné (nebo komplexní) číslo. V jiném případě říkáme, že řada je **divergentní**.

Řada tedy může, podobně jako posloupnost, být divergentní ze dvou důvodů. Buď'to je limita částečných součtů nevlastní nebo vůbec neexistuje. V prvním případě někdy používáme úsloví, že řada diverguje do (plus nebo minus) nekonečna, ve druhém někdy říkáme, že řada **osciluje**.[5]

Věta 1.4. ***Nutná podmínka pro konvergenci řady.***

Necht' $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní řadou reálných nebo komplexních čísel. Potom

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Ještě než přistoupíme k důkazu je na místě zdůraznit, že jde skutečně o nutnou, nikoliv postačující podmínku konvergence řady. Například, jak ukážeme níže, řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

je divergentní, ačkoliv její koeficienty $a_k = \frac{1}{k}$ nutnou podmínku pro konvergenci splňují, nebot' $\frac{1}{k} \to 0$ pro $k \to \infty$.

[5]) Někteří autoři mají termín **divergentní řada** vyhrazen pro řadu, jejíž součet existuje a je nekonečný, a termín **oscilující řada** vyhrazen pro řadu, jejíž součet není definován.

Důkaz. Jestliže řada konverguje, potom jejím součtem je reálné nebo komplexní číslo s, které je limitou jejích n-tých částečných součtů, tedy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Pokud z posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty} = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ vybereme podposloupnost $(s_{n+1})_{n=1}^{\infty} = (s_2, s_3, s_4, \ldots)$, potom podle věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s.$$

Podle věty o aritmetice limit je tudíž

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0.$$

Protože platí $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, máme odtud, že

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0,$$

tedy posloupnost $(a_{n+1})_{n=1}^{\infty} = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$ má limitu nula. Protože hodnota limity se nezmění odebráním konečně mnoha členů posloupnosti, musí být také

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

□

Příklad 1.5. Nyní se vrátíme ke slibovanému příkladu. Ukážeme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

ačkoliv její koeficienty splňují nutnou podmínku pro konvergenci řady.

Poznamenejme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

se nazývá **harmonickou řadou**.

Důkaz její divergence provedený níže využívá triku, který se později objeví také v důkazu Cauchyova kondenzačního kritéria pro konvergenci řad s nezápornými koeficienty, které monotónně klesají k nule. Pomocí tohoto kritéria také dokážeme silnější výsledek, totiž že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

konverguje pro každý parametr $\alpha > 1$ a diverguje do $+\infty$ pro každé $\alpha \leq 1$. Přímý důkaz divergence provedený níže pro případ $\alpha = 1$ tedy může čtenář přeskočit. Zde jej uvádíme pro úplnost.

Důkaz. Protože všechny koeficienty řady jsou kladné, je posloupnost částečný součtů (s_n) rostoucí, neboť

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} > 0.$$

Protože je posloupnost částečný součtů (s_n) rostoucí, pak musí mít limitu, neboť víme, že každá monotónní posloupnost má limitu. Abychom dokázali, že tato limita je $+\infty$, nám stačí ukázat, že posloupnost (s_n) není shora omezená.

K tomu nám pomůže následující trik:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \ldots$$

Vidíme, že pokud bereme při sčítání řady postupně jeden, pak dva, pak čtyři a pak osm jejích členů, pak v každém úseku nasčítáme více než jednu polovinu. To nás vede k hypotéze, že pokud vezmeme vždy dvojnásobek předchozího počtu členů, pak zas a znovu nasčítáme více než jednu polovinu. Tedy tvrdíme, že pokud sčítáme 2^n členů, pak nasčítáme nejméně $n \cdot \frac{1}{2}$, tj.

$$s_{2^n} \geq \frac{n}{2}.$$

Tuto hypotézu dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ zřejmě platí, neboť

$$s_{2^1} = s_2 = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Předpokládejme, že hypotéza je správná pro n a dokazujme ji pro $n + 1$. Platí, že

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}}.$$

Podle indukčního předpokladu máme, že $s_{2^n} \geq \frac{n}{2}$, stačí nám tedy dokázat, že přičtené členy nasčítají alespoň jednu polovinu.

Protože koeficienty řady tvoří klesající posloupnost, platí, že všechny můžeme odhadnout zespodu posledním přičítaným koeficientem. Tedy

$$a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Protože $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, je počet koeficientů s indexy od $2^n + 1$ do 2^{n+1} přesně $2^{n+1} - 2^n = 2^n$. Tudíž dostáváme, že

$$a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}} = \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{součet } 2^n \text{ koeficientů}} \geq \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{součet } 2^n \text{ stejných čísel}} = 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Platí tedy, že

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

a tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Pro libovolné přirozené číslo n tedy platí, že

$$s_{2^n} \geq \frac{n}{2}.$$

Odtud samozřejmě vyplývá, že posloupnost (s_n) nemůže být shora omezená, protože pro každé reálné číslo K existuje n_0 přirozené takové, že $\frac{n_0}{2} > K$, a tudíž také $s_{2^{n_0}} > K$.

Vzhledem ke zmiňované monotonii posloupnosti (s_n) odtud vyplývá, že $\lim s_n = +\infty$ a tím je celý důkaz dokončen. □

Úlohy

Úloha I.2. Rozhodněte, které z následujících řad splňují nutnou podmínku konvergence.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k+3}{(2k+1)^2}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{k}\right)^k$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k-2^k}{3^k+2^k}$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k$ (g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(2+\frac{1}{k})^k}$ (h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+\frac{1}{k}}}{(k+\frac{1}{k})^k}$

Výsledky. (a) ano, (b) ne, (c) ne, (d) ano, (e) ne, (f) ne, (g) ano, (h) ne.[6] □

[6]) K tomu ještě poznamenejme, že všechny řady této úlohy, s výjimkou řady (g), divergují. O řadách (b), (c), (e), (f) a (h) to můžeme tvrdit ihned, neboť nesplňují nutnou podmínku konvergence. U zbylých řad (a), (d) a (g) se ale musí divergence či konvergence dokázat jinak, například podle některých z kritérií v následujících částech této kapitoly.

1.3 Aritmetika řad

Věta 1.6. ***O součtu řad.***

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *jsou řady reálných nebo komplexních čísel. Potom rovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

platí vždy, jestliže oba součty na pravé straně jsou definovány a pravá strana má smysl.

Speciálně, jestliže jsou řady reálných (nebo komplexních) čísel $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergentní, potom také řada* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *je konvergentní.*

Jestliže je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergentní a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *divergentní, potom také řada* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *je divergentní.*

Věta 1.7. ***O násobení řady skalárem.***

1. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *je řadou reálných nebo komplexních čísel. Potom rovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c \cdot a_k) = c \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$$

platí, kdykoliv je součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *definován a pravá strana má smysl.*

2. Řada reálných (nebo komplexních) čísel $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum_{k=1}^{\infty}(c \cdot a_k)$ *pro libovolné reálné (nebo komplexní)* $c \neq 0$. *Speciálně, řada reálných (nebo komplexních) čísel* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k)$ *a pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k).$$

1.4 Konvergence řad s nezápornými členy

Pokud jsou všechny koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nezáporné, tj. $a_k \geq 0$ pro každý index k, potom posloupnost částečných součtů je neklesající, a tudíž má limitu. Řada s nezápornými koeficienty má tudíž vždy součet, byť může být buď konečný nebo nekonečný.

Předchozí úvahu lze aplikovat také na řadu, jejíž koeficienty jsou nekladné, pouze s tím rozdílem, že potom je posloupnost částečných součtů nerostoucí. Lze ji také jednoduše zobecnit na řady, jejíž členy nemění znaménko (tj. jsou buď nezáporné nebo nekladné) až od nějakého indexu počínaje, neboť od téhož indexu počínaje je posloupnost částečných součtů monotónní. A protože limitu posloupnosti neovlivní odebrání konečně mnoha členů, musí mít i v tomto případě posloupnost částečných součtů limitu.

Každá řada, jejíž členy od nějakého počínaje nemění znaménko, má tedy vždy definován součet. To je příklad jedné z výhod, které má vyšetřování takových řad oproti řadám se zcela obecnými koeficienty. V dalších odstavcích této části kapitoly o řadách odvodíme kritéria konvergence, pro jejichž platnost je neměnnost znaménka koeficientů řady podstatným předpokladem.

Budeme se přitom bez újmy na obecnosti věnovat pouze řadám, jejichž všechny koeficienty jsou nezáporné. Veškeré dosažené výsledky lze ale přímočaře zobecnit i pro řady, jejichž koeficienty jsou nekladné (to je samozřejmý důsledek věty 1.7 o násobení řady skalárem) anebo je předpoklad nezápornosti či nekladnosti splněn až od jistého indexu počínaje. O tom totiž mluví následující věta, která podobně jako v případě limity posloupnosti v podstatě říká, že na konvergenci řady nemá vliv změna konečného počtu jejích koeficientů. Její jednoduchý a krátký důkaz je ponechán čtenáři.

Věta 1.8. *Nechť* k_0 *je libovolné přirozené číslo. Řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_n$.

Je na místě poznamenat, že kritéria odvozená níže pro řady s nezápornými koeficienty mají význam také pro zcela obecné řady. Platí totiž následující věta.

Věta 1.9. ***O absolutní konvergenci.***

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *je řada s reálnými nebo komplexními koeficienty. Jestliže konverguje řada absolutních hodnot koeficientů původní řady, tj. řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

potom konverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Pár poznámek před důkazem. Jestliže konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, potom o původní řadě $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ říkáme, že je **absolutně konvergentní** nebo také, že **konverguje absolutně**. Výše uvedenou větu tedy často vyslovujeme takto: *Pokud řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně, potom konverguje.*

Přitom je evidentní, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ je řadou s nezápornými koeficienty. Všechna níže odvozená kritéria pro tento typ řad lze tedy automaticky použít i pro vyšetřování absolutní konvergence zcela obecné řady.

Podotkněme ovšem, že existují řady, které konvergují a přitom nekonvergují absolutně. Takovým řadám, kterým říkáme neabsolutně konvergentní, se budeme věnovat níže ve speciální části této kapitoly. Tuto část uzavřeme dvěma různými důkazy výše formulované věty. Jeden, kratší, využívá Bolzano-Cauchyovu podmínku pro konvergenci posloupností. Druhý uvádíme proto, že se opírá o vlastnosti řad s nezápornými členy a aritmetiku řad. Objeví se v něm také myšlenka použitá pro odvození srovnávacího kritéria. Poté už přistoupíme k odvození kritérií pro konvergenci řad s nezápornými členy, a tedy také kritérií pro absolutní konvergenci.

Důkaz věty o absolutní konvergenci. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní, jestliže existuje vlastní limita posloupnosti jejích částečných součtů (s_n). Existence vlastní limity posloupnosti je ekvivalentní splnění Bolzano-Cauchyovy podmínky: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m > n > n_0$ je $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Pro libovolné $m > n$ platí odhad

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| = s'_m - s'_n, \tag{1.1}$$

kde s'_m značí m-tý částečný součet konvergentní řady $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. A protože je tato řada konvergentní, posloupnost jejích částečných součtů vlastní limitu má, a tudíž musí splňovat výše uvedenou Bolzano-Cauchyovu podmínku: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m > n > n_0$ je $|s'_m - s'_n| = s'_m - s'_n < \varepsilon$.

Pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ tedy stačí tedy najít příslušné n_0 tak, aby pro libovolná $m > n > n_0$ bylo $s'_m - s'_n < \varepsilon$. Potom odhad 1.1 dává, že pro libovolná $m > n > n_0$ je také $|s_m - s_n| \leq s'_m - s'_n < \varepsilon$. Tím je ověřeno splnění Bolzano-Cauchyovy podmínky pro posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, a tudíž tato posloupnost má vlastní limitu a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní. □

Jiný důkaz věty o absolutní konvergenci. Nechť je tedy dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s reálnými koeficienty. Předpokládáme, že konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ a ptáme se, zda konverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Protože platí

$$0 \leq a_k + |a_k|$$

má řada $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$ nezáporné koeficienty, a tudíž má na základě úvah provedených na začátku této části kapitoly definován součet. Pro připomenutí: jestliže koeficienty řady jsou nezáporné, potom částečné součty řady tvoří neklesající posloupnost a neklesající posloupnost (obecněji monotónní posloupnost) má limitu.

Tato limita navíc nemůže být nevlastní, neboť

$$a_k + |a_k| \leq 2|a_k|,$$

a tedy pro n-tý částečný součet platí

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|) \leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$ je tedy rostoucí a shora omezená, tudíž má vlastní limitu, a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$ je konvergentní. Protože také řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ je konvergentní, platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|) + \sum_{k=1}^{\infty}(-|a_k|),$$

a tedy podle výše uvedených vět 1.6 o součtu řad a 1.7 o násobení řady skalárem je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní, neboť je součtem dvou konvergentních řad.

V případě, že koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jsou komplexní, aplikujeme výše uvedené úvahy namísto na řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ postupně na řady $\sum_{k=1}^{\infty} \Re(a_k)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \Im(a_k)$, kde $\Re$ a $\Im$ značí reálnou a imaginární část komplexního čísla. Protože $0 \leq \Re(a_k) + |a_k| \leq 2|a_k|$ i $0 \leq \Im(a_k) + |a_k| \leq 2|a_k|$, z důvodů analogických těm uvedeným výše řady $\sum_{k=1}^{\infty}(\Re(a_k) + |a_k|)$ a $\sum_{k=1}^{\infty}(\Im(a_k) + |a_k|)$ konvergují, a tudíž

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Re(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Re(a_k) + |a_k|) + \sum_{k=1}^{\infty}(-|a_k|), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \Im(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Im(a_k) + |a_k|) + \sum_{k=1}^{\infty}(-|a_k|).$$

Odtud vyplývá, že řady $\sum_{k=1}^{\infty} \Re(a_k)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \Im(a_k)$ konvergují, a tudíž konverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ podle vět 1.6 o součtu řad a 1.7 o násobení řady skalárem, neboť

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\Re(a_k) + i \cdot \Im(a_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \Re(a_k) + i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \Im(a_k).$$

□

1.4.1 Srovnávací kritérium a jeho limitní verze

V posledním důkazu se objevila následující myšlenka: posloupnost částečných součtů řady s nezápornými koeficienty je neklesající posloupnost, a tudíž musí mít limitu. Přitom, pokud se nám podaří koeficienty příslušné řady odhadnout seshora koeficienty jiné řady, o které víme, že je konvergentní, pak je tato posloupnost částečných součtů odhadnuta seshora součtem oné větší konvergentní řady. Tudíž je shora omezená a neklesající, má tedy vlastní limitu. Tyto úvahy v podstatě dokazují polovinu následujícího kritéria, kterému, protože při něm porovnáme velikost koeficientů dvou různých řad, říkáme srovnávací kritérium.

Věta 1.10. ***Srovnávací kritérium.***

Nechť jsou dány řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, jejichž koeficienty jsou (od nějakého počínaje) nezáporné.

1. Jestliže platí $a_k \leq b_k$ pro každé k přirozené (od nějakého počínaje) a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je konvergentní, potom také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní.

2. Jestliže platí $a_k \geq b_k$ pro každé k přirozené (od nějakého počínaje) a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je divergentní, potom také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je divergentní.

Důkaz. 1. Důkaz je de facto pouhou formalizací úvah uvedených před touto větou. Jestliže koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jsou od nějakého indexu k_1 počínaje nezáporné, koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jsou nezáporné od indexu k_2 a odhad $a_k \leq b_k$ platí od indexu k_3, potom od indexu $k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ platí všechna tato tři fakta. Tedy pro všechny indexy větší než k_0 jsou koeficienty a_k, b_k nezáporné a platí odhad $a_k \leq b_k$.

Posloupnost částečných součtů $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je jistě od indexu k_0 neklesající, neboť od tohoto indexu výše jsou všechny koeficienty řady nezáporné. Pak pro $n \geq k_0$ platí

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0.$$

Je-li posloupnost $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ od indexu k_0 výše neklesající, pak její podposloupnost $(s_{k_0}, s_{k_0+1}, s_{k_0+2}, \ldots)$ má limitu. A protože tuto podposloupnost jsme dostali vynecháním prvních $k_0 - 1$ členů původní posloupnosti $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{k_0}, s_{k_0+1}, s_{k_0+2}, \ldots)$ a víme, že na limitu posloupnosti nemůže mít vynechání konečně mnoha členů žádný vliv, má tutéž limitu také celá posloupnost částečných součtů a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tedy má součet.

Ukážeme, že limita posloupnosti částečných součtů (s_n) řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nemůže být nevlastní, protože tato posloupnost, respektive její podposloupnost $(s_{k_0}, s_{k_0+1}, s_{k_0+2}, \ldots)$, je shora omezená. Volme pevně přirozené číslo $n > k_0$. Pak totiž platí odhad

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + b_{k_0} + b_{k_0+1} + \ldots + b_n,$$

kde jsme všechny koeficienty původní řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ od indexu k_0 počínaje odhadli seshora koeficienty konvergentní řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, přesně podle předpokladu věty. Protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je konvergentní, konverguje podle věty 1.8 také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$. A protože posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ je neklesající (má všechny koeficienty nezáporné), je každý její částečný součet menší nebo roven celkovému součtu řady, tedy pro libovolné $n > k_0$ je

$$b_{k_0} + b_{k_0+1} + \ldots + b_n = \sum_{k=k_0}^{n} b_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

Z nerovnosti odvozené výše

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + \underbrace{b_{k_0} + b_{k_0+1} + \ldots + b_n}_{=\sum_{k=k_0}^{n} b_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k},$$

dostaneme odhadem částečného součtu $\sum_{k=k_0}^{n} b_k$ na pravé straně celkovým součtem $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ odhad pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$s_n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

Na pravé straně poslední nerovnosti je konečné číslo (poněvadž řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ je konvergentní) a toto číslo nezávisí na zvoleném $n > k_0$. Podposloupnost $(s_{k_0}, s_{k_0+1}, s_{k_0+2}, \ldots)$ je tedy shora omezená a v první části důkazu jsme ukázali, že je neklesající. Tudíž musí mít vlastní limitu. Tutéž limitu musí mít podle úvah provedených na začátku důkazu také celá posloupnost částečných součtů, což neznamená nic jiného, než že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní.

2. Obdobně jako v první části důkazu, jestliže koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jsou od nějakého indexu k_1 počínaje nezáporné, koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jsou nezáporné od indexu k_2 a odhad $a_k \geq b_k$ platí od indexu k_3, potom od indexu $k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$ platí všechna tato tři fakta. Tedy pro všechny indexy větší než k_0 jsou koeficienty a_k, b_k nezáporné a platí odhad $a_k \geq b_k$.

Stejně jako v první části důkazu je posloupnost částečných součtů $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ od indexu k_0 neklesající, tj. její podposloupnost $(s_{k_0}, s_{k_0+1}, s_{k_0+2}, \ldots)$ je neklesající, neboť $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ pro každé $n \geq k_0$. Má tedy limitu, a protože vznikla vynecháním konečně mnoha členů posloupnosti (s_n), má také posloupnost (s_n) limitu. Ukážeme, že posloupnost (s_n) navíc není zdola omezená, takže tato limita musí být $+\infty$.

Pro libovolné $n > k_0$ platí nerovnost

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + a_{k_0} + \ldots + a_n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + b_{k_0} + \ldots + b_n,$$

kde všechny koeficienty a_k jsme pro $n \geq k_0$ odhadli podle předpokladu věty zespodu koeficienty b_k. Protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je podle předpokladu divergentní, je divergentní podle věty 1.8 také řada $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k$, a tudíž posloupnost jejích částečných součtů (s'_m), kde $s'_m = b_{k_0} + b_{k_0+1} + \ldots + b_{k_0+m}$, není shora omezená.

Chceme ukázat, že posloupnost (s_n) částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ není shora omezená. Volme tedy reálné číslo K libovolně, ukážeme, že existuje index n takový, že $s_n \geq K$. Protože posloupnost (s'_m) není shora omezená, existuje index m_0 takový, že $s'_m > K - a_1 - a_2 - \ldots - a_{k_0-1}$. Pokud položíme $n = k_0 - 1 + m$, potom podle výše odvozené nerovnosti máme

$$s_n = s_{k_0-1+m} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + b_{k_0} + \ldots + b_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + s'_m >$$

$$> a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + K - a_1 - a_2 - \ldots - a_{k_0-1} = K.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost (s_n) není shora omezená, a protože víme, že má limitu, musí být tato limita $+\infty$. Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, což znamená, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je divergentní. □

Dokázat nerovnosti $a_k \leq b_k$ nebo $a_k \geq b_k$ může být někdy obtížné, a to i tehdy, jestliže je dokazujeme až od nějakého libovolně zvoleného indexu počínaje. Vhodnou formou porovnání koeficientů se tak ukazuje být limita. Pokud totiž jsou koeficienty a_k a b_k kladné a existuje vlastní nenulová limita

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

potom z definice limity vyplývá, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k_0 tak, že pro $k \geq k_0$ platí

$$L - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < L + \varepsilon,$$

přitom ε lze jistě volit tak, aby $L - \varepsilon$ bylo kladné číslo. Tudíž

$$(L - \varepsilon) a_k < b_k < (L + \varepsilon) a_k.$$

Odtud posčítáním přes všechny indexy od k_0 počínaje do libovolného indexu $n > k_0$ vyplývá, že

$$(L-\varepsilon)\cdot\sum_{k=k_0}^{n} a_k < \sum_{k=k_0}^{n} b_k < (L+\varepsilon)\cdot\sum_{k=k_0}^{n} a_k$$

a pomocí limitního přechodu pro $n \to \infty$ dostaneme[7]

$$(L-\varepsilon)\cdot\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \le \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \le (L+\varepsilon)\cdot\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$

a podle věty o násobení řady skalárem a srovnávacího kritéria máme:

1. Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak podle věty 1.8 konverguje také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$. Tudíž konverguje také řada $(L+\varepsilon)\cdot\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ a podle srovnávacího kritéria konverguje také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$. Konečně podle věty 1.8 pak konverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

2. Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, pak podle věty 1.8 diverguje také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$. Tudíž diverguje také řada $(L+\varepsilon)\cdot\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ a podle srovnávacího kritéria diverguje také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$. Konečně podle věty 1.8 pak diverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Odvodili jsme tedy následující větu.

Věta 1.11. ***Symetrická limitní verze srovnávacího kritéria***

Nechť jsou dány řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, jejichž koeficienty jsou kladné. Jestliže existuje vlastní nenulová limita

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = L,$$

tj. $L \neq 0$ a $L \neq +\infty$, potom řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ buď obě konvergují nebo obě divergují. Není tedy možné, aby jedna z nich konvergovala a druhá divergovala.

V případě, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = +\infty,$$

pak závěr předchozí věty platit nemusí, přesto lze říci alespoň o něco méně.

Věta 1.12. ***Jednostranné limitní verze srovnávacího kritéria***

1. Nechť jsou dány řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, jejichž koeficienty jsou kladné. Jestliže

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = 0$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, potom konverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Nechť jsou dány řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, jejichž koeficienty jsou kladné. Jestliže

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = +\infty$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje, potom diverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důkaz. 1. Jestliže $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = 0$, potom podle definice limity pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje index k_0 tak, že pro $k \ge k_0$ je $\frac{a_k}{b_k} < \varepsilon$. Speciálně, volíme-li $\varepsilon = 1$, pak existuje index k_0 tak, že pro $k \ge k_0$ je $\frac{a_k}{b_k} < 1$, tedy $a_k < b_k$. Závěr prvního tvrzení věty tudíž ihned vyplývá ze srovnávacího kritéria.

2. Jestliže $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = +\infty$, potom podle definice limity pro libovolně zvolené K reálné existuje index k_0 tak, že pro $k \ge k_0$ je $\frac{a_k}{b_k} > K$. Speciálně, volíme-li $K = 1$, pak existuje index k_0 tak, že pro $k \ge k_0$ je $\frac{a_k}{b_k} > 1$, tedy $a_k > b_k$. Závěr druhého tvrzení věty tudíž ihned vyplývá ze srovnávacího kritéria. $\square$

Dodejme ale, že pokud $\lim\frac{a_k}{b_k} = 0$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje, pak druhá řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ může být konvergentní i divergentní, srovnání nám tedy nic nedává. Pro úplnost uveďme konkrétní příklady. Volíme-li například $b_k =$

[7]) Limita zachovává pouze neostré nerovnosti, proto se ostré nerovnosti zaměnily za neostré. Všechny tři limity existují, protože jde o limity monotónních (neklesajících) posloupností.

$\frac{1}{\sqrt{k}}$, pak z nerovnosti $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ pomocí srovnávacího kritéria vyplývá, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ je divergentní, neboť víme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentní. Volíme-li právě $a_k = \frac{1}{k}$, potom $\lim \frac{a_k}{b_k} = 0$, přitom ale o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je divergentní. Volíme-li naopak $a_k = 0,1^k$, pak podle příkladu 1.2c je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní a přitom víme, že $\lim \frac{a_k}{b_k} = 0$.

Stejně tak pokud $\lim \frac{a_k}{b_k} = +\infty$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, pak druhá řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ může být konvergentní i divergentní. Stačí volit například $b_k = 0,01^k$ a $a_k = 2^k$ nebo $a_k = 0,1^k$. V případě obou voleb a_k je $\lim \frac{a_k}{b_k} = +\infty$. Divergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k$ vyplývá z toho, že tato řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, tj. $2^k \not\to 0$ pro $k \to \infty$. Konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} 0,1^k$ byla dokázána v příkladu 1.2c a konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} 0,01^k$ vyplývá přímo ze srovnávacího kritéria, neboť $0,01^k \leq 0,1^k$.[8]

Srovnávací kritérium a jeho limitní verze jsou mocným nástrojem pro vyšetřování konvergence řad. Pro jejich použití je ale zapotřebí mít v zásobě alespoň několik základních řad, o jejichž konvergenci a divergenci umíme rozhodnout a které přitom lze dostatečně univerzálně používat pro srovnání. Jedním příkladem takové řady je tzv. geometrická řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

která konverguje pro $|q| < 1$ a diverguje jinak. Na základě srovnání s geometrickou řadou dokážeme podílové a odmocninové kritérium pro konvergenci řad. Druhým příkladem jsou řady typu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

kde p je reálný parametr. O těchto řadách, kterým se někdy také říká p-**řady**, dokážeme, že konvergují pro každé $p > 1$ a divergují jinak. Nástrojem k tomu nám bude tzv. kondenzační kritérium. Předchozím dvěma řadám a zmíněným kritériím budou věnovány následující dvě části této kapitoly.

1.4.2 Geometrická řada. Podílové a odmocninové kritérium

Nechť q je reálné nebo komplexní číslo. Řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

nazýváme **geometrickou řadou**. Pro její konvergenci platí jednoduché kritérium.

Věta 1.13. ***O konvergenci geometrické řady.***

Nechť $q \in \mathbb{C}$. Geometrická řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^n$ konverguje, právě když $|q| < 1$. Navíc, pokud geometrická řada konverguje, potom pro její součet platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Důkaz. Pokud $q = 1$, potom je geometrická řada součtem samých jedniček, a tedy zjevně divergentní (viz také příklad 1.2a). Ukážeme, že pokud $q \neq 1$, pak pro částečný součet geometrické řady

$$s_n = q^0 + q^1 + \ldots + q^n$$

platí vztah

$$s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \tag{1.2}$$

Vztah lze dokazovat buď indukcí nebo následujícím trikem. Zřejmě platí, že

$$qs_n = q(q^0 + q^1 + \ldots + q^n) = q^1 + q^2 + \ldots + q^{n+1},$$

a tedy

$$qs_n - s_n = q^{n+1} - 1,$$

odkud ihned vyplývá hledaný vztah 1.2 pro částečný součet s_n.

[8]) Všechny tři poslední uvažované řady jsou příklady geometrické řady $\sum q^k$, kde q je dané číslo. Pro geometrickou řadu níže odvodíme kritérium konvergence v závislosti na parametru q. Konkrétně: geometrická řada konverguje, právě když $|q| < 1$.

Jestliže je nyní $|q| < 1$, potom $\lim |q^{n+1}| = \lim |q|^{n+1} = 0$, a tudíž také $\lim q^{n+1} = 0$.[9] Z věty o aritmetice limit tak vyplývá

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Pokud je naopak $|q| \geq 1$, potom také $|q|^k \geq 1$ pro každé k přirozené, a tudíž není možné, aby $\lim |q|^k = 0$, protože limita (existuje-li) zachovává neostré nerovnosti. Tudíž není možné, aby $\lim q^k = 0$, protože to je ekvivalentní $\lim |q|^k = 0$, odkud vyplývá, že pro $|q| \geq 1$ geometrická řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Je tudíž divergentní a důkaz věty je hotov. □

Na srovnání řady s vhodnou geometrickou řadou jsou založena následující kritéria: d'Alembertovo podílové kritérium a Cauchyovo odmocninové kritérium.

Věta 1.14. ***d'Alembertovo podílové kritérium.***

Nechť je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s kladnými koeficienty.

1. Jestliže existuje číslo $q < 1$ tak, že

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \qquad \text{pro každé } k \text{ přirozené od nějakého počínaje,}$$

potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní.

2. Jestliže existuje číslo $q \geq 1$ tak, že

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq q \qquad \text{pro každé } k \text{ přirozené od nějakého počínaje,}$$

potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergentní.

Důkaz. 1. Předpokládejme, že od indexu k_0 pro každý větší index $k \geq k_0$ platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q,$$

pro nějaké pevné $q < 1$. Potom postupně nahlédneme, že

$$\begin{aligned} a_{k_0+1} &\leq q a_{k_0} \\ a_{k_0+2} &\leq q a_{k_0+1} \leq q^2 a_{k_0} \\ a_{k_0+3} &\leq q a_{k_0+2} \leq q^2 a_{k_0+1} \leq q^3 a_{k_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

a pokud tuto úvahu zopakujeme n-krát, kde n je libovolné přirozené číslo, dostáváme, že

$$a_{k_0+n} \leq q^n \cdot a_{k_0}.$$

Odtud vyplývá, že koeficienty řady $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ můžeme seshora odhadnout koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty}(q^k \cdot a_{k_0})$. A protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ je konvergentní (vyplývá to z faktu, že $q < 1$ a předchozí věty o konvergenci geometrické řady), je konvergentní také řada $\sum_{k=1}^{\infty}(q^k \cdot a_{k_0})$ a podle srovnávacího kritéria je konvergentní také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$. Podle věty 1.8 je tudíž konvergentní také původní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Důkaz je analogický předchozí části. Předpokládejme, že od indexu k_0 pro každý větší index $k \geq k_0$ platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq q,$$

pro nějaké pevné $q \geq 1$. Potom postupně nahlédneme, že

$$\begin{aligned} a_{k_0+1} &\geq q a_{k_0} \\ a_{k_0+2} &\geq q a_{k_0+1} \geq q^2 a_{k_0} \\ a_{k_0+3} &\geq q a_{k_0+2} \geq q^2 a_{k_0+1} \geq q^3 a_{k_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

[9]) Připomeňme, že $\lim a_n = 0$, právě když $\lim |a_n| = 0$.

a pokud tuto úvahu zopakujeme n-krát, kde n je libovolné přirozené číslo, dostáváme, že

$$a_{k_0+n} \geq q^n \cdot a_{k_0}.$$

Odtud vyplývá, že koeficienty řady $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ můžeme zespodu odhadnout koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty}(q^k \cdot a_{k_0})$. A protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ je divergentní (vyplývá to z faktu, že $q \geq 1$ a předchozí věty o konvergenci geometrické řady), je divergentní také řada $\sum_{k=1}^{\infty}(q^k \cdot a_{k_0})$ a podle srovnávacího kritéria je divergentní také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$. Podle věty 1.8 je tudíž divergentní také původní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. □

Ihned poznamenejme, že pro důkaz divergence podle d'Alembertova podílového kritéria stačí splnit podmínku

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \qquad \text{od nějakého indexu počínaje,}$$

ale pro důkaz konvergence podle d'Alembertova podílového kritéria **již nestačí** splnit slabší podmínku

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

a to ani tehdy, je-li splněna pro každé k přirozené. Protipříkladem je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, o které víme, že je divergentní, přitom

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} < 1 \qquad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}.$$

Podmínka v d'Alembertově kritériu

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$$

znamená nejenom, že podíly $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ jsou ostře menší než jedna, ale že jsou tyto podíly od jedničky tzv. „odražené“. To znamená, že tyto podíly se nejenom nesmí jedné rovnat, ale nesmí se k jedné ani „blížit“ve smyslu limity. A naopak, pokud limita těchto podílů je číslo ostře menší než jedna, potom víme, že tyto podíly musí být od jedničky odražené. Toto pozorování vede k limitní verzi podílového kritéria.

Věta 1.15. ***Limitní d'Alembertovo podílové kritérium.***

Nechť je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s kladnými koeficienty.

1. Jestliže

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní.

2. Jestliže

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$

potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergentní.

Důkaz. 1. Jestliže $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, potom od nějakého indexu počínaje musí být $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$.[10] Tvrzení tedy vyplývá z nelimitní verze podílového kritéria.

2. Jestliže $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, potom od nějakého indexu počínaje musí být $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$. Tvrzení tedy vyplývá z nelimitní verze podílového kritéria. □

Dodejme, že pokud $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ může být konvergentní i divergentní.[11] Příkladem divergentní řady splňující tuto podmínku je již mnohokrát zmíněná harmonická řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, neboť $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{k}{k+1} = 1$. Příkladem konvergentní řady, pro kterou $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, je například řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Ověření předchozí limity je zcela přímočaré, konvergenci řady lze dokázat přímo z definice: protože $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$,

[10]) Podle věty o limitě a uspořádání, která říká, že pokud $\lim a_n < \lim b_n$, potom od nějakého indexu počínaje musí být $a_n < b_n$.

[11]) Což je zdánlivě nepatrný rozdíl oproti nelimitní verzi kritéria, kde případ $q = 1$ vedl k divergenci.

platí pro její n-tý částečný součet

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}\\
s_2 &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}\\
s_3 &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}\\
s_4 &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=1-\frac{1}{5}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

odkud jednoduchou indukcí vyplývá, že n-tý člen posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ splňuje vztah

$$s_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Tudíž $s_n\to 1$ pro $n\to\infty$. Limita posloupnosti částečných součtů (s_n) je tedy vlastní, což podle definice znamená, že řada $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ je konvergentní.

Věta 1.16. ***Cauchyovo odmocninové kritérium.***
Nechť je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ s nezápornými koeficienty.
1. Jestliže existuje číslo $q<1$ tak, že

$$\sqrt[k]{a_k}\le q \qquad \text{pro každé } k \text{ přirozené od nějakého počínaje,}$$

potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergentní.
2. Jestliže existuje číslo $q\ge 1$ tak, že

$$\sqrt[k]{a_k}\ge q \qquad \text{pro každé } k \text{ přirozené od nějakého počínaje,}$$

potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ divergentní.

Důkaz. 1. Předpokládejme, že od indexu k_0 pro každý větší index $k\ge k_0$ platí

$$\sqrt[k]{a_k}\le q,$$

pro nějaké pevné $q<1$. Odtud ihned vyplývá, že

$$a_k\le q^k \qquad \text{pro } k\ge k_0,$$

a tudíž koeficienty řady $\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k$ můžeme seshora odhadnout koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$. A protože řada $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$ je pro $q<1$ konvergentní, je podle srovnávacího kritéria konvergentní také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k$. Podle věty 1.8 je tudíž konvergentní také původní řada $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$.
2. Důkaz je analogický předchozí části. Předpokládejme, že od indexu k_0 pro každý větší index $k\ge k_0$ platí

$$\sqrt[k]{a_k}\ge q,$$

pro nějaké pevné $q\ge 1$. Potom

$$a_k\ge q^k \qquad \text{pro } k\ge k_0,$$

a tudíž koeficienty řady $\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k$ můžeme zespodu odhadnout koeficienty řady $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$. A protože řada $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$ je divergentní, je podle srovnávacího kritéria je divergentní také řada $\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k$. Podle věty 1.8 je tudíž divergentní také původní řada $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. □

Ani v Cauchyově odmocninovém kritériu nestačí splnit pro důkaz konvergence slabší podmínku

$$\sqrt[k]{a_k}<1,$$

protipříkladem je opět divergentní harmonická řada $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, pro kterou jistě platí $\sqrt[k]{a_k}=\frac{1}{\sqrt[k]{k}}<1$, neboť libovolná odmocnina čísla většího než 1 je číslo větší než 1.

Také pro Cauchyovo odmocninové kritérium lze odvodit jeho limitní verzi.

Věta 1.17. ***Limitní Cauchyovo odmocninové kritérium.***

Nechť je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s kladnými koeficienty.

1. Jestliže

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1,$$

potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní.

2. Jestliže

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1,$$

potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergentní.

Důkaz. 1. Jestliže $\lim \sqrt[k]{a_k} < 1$, potom od nějakého indexu počínaje musí být $\sqrt[k]{a_k} < 1$. Tvrzení tedy vyplývá z nelimitní verze odmocninového kritéria.

2. Jestliže $\lim \sqrt[k]{a_k} > 1$, potom od nějakého indexu počínaje musí být $\sqrt[k]{a_k} > 1$. Tvrzení tedy vyplývá z nelimitní verze odmocninového kritéria. □

Stejně jako tomu je u d'Alembertova podílového kritéria, jestliže $\lim \sqrt[k]{a_k} = 1$, potom řada může konvergovat i divergovat. Jako příkladů lze použít stejných řad jako u podílového kritéria.

1.4.3 Kondenzační kritérium a jeho důsledky

Věta 1.18. ***Kondenzační kritérium.***

Nechť je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, jejíž členy jsou nezáporné a tvoří nerostoucí posloupnost. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Důkaz. Uvažme 2^n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$s_{2^n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n}.$$

Díky tomu, že posloupnost koeficientů je nerostoucí, jej můžeme odhadnout pomocí částečných součtů druhé řady seshora i zespoda. Klíčem k tomu je odhad skupiny koeficentů

$$a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}}.$$

V této skupině je přesně $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ členů, a protože posloupnost koeficientů a_k neroste, můžeme ji odhadnout zespodu i seshora pomocí posledního koeficientu $a_{2^{n+1}}$ nebo předchozího koeficientu a_{2^n} vynásobeného počtem členů skupiny, neboť tento koeficient je menší, resp. větší než všechny členy součtu. Je tedy

$$\underbrace{a_{2^n}}_{\geq a_{2^{n+1}}} + \underbrace{a_{2^n+1}}_{\geq a_{2^{n+1}}} + \ldots + \underbrace{a_{2^{n+1}-1}}_{\geq a_{2^{n+1}}} \geq 2^n a_{2^{n+1}},$$

respektive

$$\underbrace{a_{2^n}}_{\leq a_{2^n}} + \underbrace{a_{2^n+1}}_{\leq a_{2^n}} + \ldots + \underbrace{a_{2^{n+1}-1}}_{\leq a_{2^n}} \leq 2^n a_{2^n}.$$

Rozdělíme-li tedy sčítance v součtu s_{2^n} postupně do skupin o jednom, dvou, čtyřech, osmi, šestnácti atd. členech (počet členů ve skupině roste dvojnásobně, tj. po mocninách dvou) a každou skupinu odhadneme výše uvedeným způsobem, dostaneme odhad seshora

$$s_{2^n} = \underbrace{a_1}_{\leq 1a_1} + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2\cdot a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\leq 4\cdot a_4} + \underbrace{a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}}_{\leq 8\cdot a_8} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{a_{2^{n-1}} + a_{2^n-2} + \ldots + a_{2^n-1}}_{\leq 2^{n-1}\cdot a_{2^{n-1}}} \leq 1a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}},$$

kde jsme při odhadování na každou skupinu použili odhad uvedený menším písmem pod ní. Jestliže píšeme 2^0 namísto jedničky, 2^1 namísto dvojky, 2^2 namísto čtyřky, 2^3 namísto osmičky atd., můžeme poslední výraz psát ve tvaru

$$1a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} = 2^0 a_{2^0} + 2^1 a_{2^1} + 2^2 a_{2^2} + 2^3 a_{2^3} + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k}.$$

Pokud nás naopak zajímá odhad zezdola, pak opět rozdělíme sčítance v s^{2^n} stejným způsobem a použijeme odhad každé skupiny následujícím koeficientem, tedy

$$s_{2^n} = \underbrace{a_1}_{\geq 1a_2} + \underbrace{a_2 + a_3}_{\geq 2\cdot a_4} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\geq 4\cdot a_8} + \underbrace{a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}}_{\geq 8\cdot a_{16}} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{a_{2^{n-1}} + a_{2^n-2} + \ldots + a_{2^n-1}}_{\geq 2^{n-1}\cdot a_{2n}} \geq 1a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \ldots + 2^{n-1}a_{2^n}.$$

Opět jsme při odhadování na každou skupinu použili odhad uvedený menším písmem pod ní. Jestliže píšeme 2^0 namísto jedničky, 2^1 namísto dvojky, 2^2 namísto čtyřky, 2^3 namísto osmičky atd., můžeme poslední výraz psát ve tvaru

$$1a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \ldots + 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2} \cdot (2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \ldots + 2^n a_{2^n}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2^1 a_{2^1} + 2^2 a_{2^2} + 2^3 a_{2^3} + 2^4 a_{2^4} + \ldots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 2^k a_{2^k}.$$

Pokud m-tý částečný součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ označíme s'_m, tj.

$$s'_m = \sum_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k}$$

pak výše odvozené nerovnosti můžeme psát ve tvaru

$$\frac{1}{2}(s'_{n-1} - a_1) \leq s_{2^n} \leq s'_{n-1}.$$

Z toho vyplývá:

1. Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konverguje, potom její částečné součty tvoří neklesající konvergentní posloupnost (neklesající z toho důvodu, že jde o řadu s nezápornými členy), a tudíž

$$s_{2^n} \leq s'_{n-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Protože je na pravé straně rovnosti pevně dané číslo (které nezávisí na n), je tím vlastně ukázáno, že posloupnost (s_n) částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je shora omezená. Ukázali jsme to sice jen pro ty koeficienty, které jsou tvaru mocniny dvojky, nicméně to lze snadno napravit. Je-li n libovolné přirozené číslo, potom $n < 2^n$, a tudíž

$$s_n < s_{2^n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

A protože $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řadou s nezápornými koeficienty, je její posloupnost částečných součtů neklesající. Dohromady máme, že je neklesající a shora omezená, tudíž má vlastní limitu, a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní.

2. Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ diverguje, potom její částečné součty s'_m tvoří neklesající divergentní posloupnost, a tudíž posloupnost, která roste nade všechny meze. Tudíž také posloupnost $\left(\frac{1}{2}(s'_m - a_1)\right)$ tvoří neklesající posloupnost rostoucí nade všechny meze a z odhadu

$$s_{2^n} \geq \frac{1}{2}(s'_{n-1} - a_1)$$

je zřejmé, že také posloupnost s_{2^n} roste nade všechny meze. Je-li totiž K libovolné reálné číslo, potom existuje m takové, že $\frac{1}{2}(s'_m - a_1) > K$, a tudíž také $s_{2^{m+1}} > K$. Tudíž posloupnost (s_n) částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je neklesající a shora neomezená, tudíž má limitu $+\infty$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je divergentní. Tím je důkaz hotov. □

Důkaz lze zjednodušit pomocí srovnávacího kritéria. V důkazu jsme vlastně původní řadu (jednotlivé skupiny čísel označujeme závorkami)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}) + (a_{16} + \dots$$

odhadli seshora řadou

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + (a_{16} + \dots$$

a zespoda řadou

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + (a_{16} + a_{16} + a_{16} + a_{16} + a_{16} + a_{16} + a_{16} + a_{16}) + (a_{32} + \dots$$

přitom konvergence obou řad použitých k odhadu je zjevně ekvivalentní konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Nyní kondenzační kritérium použijeme ke slíbenému vyšetření konvergence p-řad. Připomeňme, že p-řadou myslíme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

kde p je reálný parametr.

Důsledek 1.19. *Řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

konverguje pro každé $p > 1$ a diverguje pro každé $p \leq 1$.

Důkaz. Pokud $p \leq 0$, potom $\frac{1}{k^p} \not\to 0$ pro $k \to \infty$, a tudíž řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Pokud $p > 0$, potom posloupnost $(\frac{1}{k^p})$ je klesající posloupnost s kladnými členy, a proto je konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ podle kondenzačního kritéria ekvivalentní konvergenci řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(2^p}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2^{p-1}}\right)^k.$$

Poslední řada je geometrickou řadou s kvocientem $q = \frac{1}{2^{p-1}}$. Víme, že geometrická řada (s kladným kvocientem) konverguje, právě když $q < 1$, což odpovídá podmínce, že $p - 1 > 0$, tedy $p > 1$, a diverguje, pokud $q \geq 1$, což odpovídá podmínce $p \leq 1$. □

Ukážeme si ještě jedno o něco obecnější použití kondenzačního kritéria.

Důsledek 1.20. *Řada*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k}$$

konverguje pro každé $p > 1$ a libovolné q nebo pokud $p = 1$ a $q > 1$. V jiných případech je divergentní.

Důkaz. Důkaz rozdělíme do čtyřech kroků.

1. Pokud $p > 1$, potom lze řadu $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k}$ srovnat s řadou $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{p-\varepsilon}}$, kde ε volíme kladné a takové, aby $p - \varepsilon > 1$.[12] Označíme-li $a_k = \frac{1}{k^p \ln^q k}$ a $b_k = \frac{1}{k^{p-\varepsilon}}$, potom vidíme, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^p \ln^q k}}{\frac{1}{k^{p-\varepsilon}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^\varepsilon \ln^q k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln^q k}{k^\varepsilon} = 0,$$

pro každé reálné číslo q. A protože $p - \varepsilon > 1$, řada $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{p-\varepsilon}}$ konverguje podle předchozího důsledku kondenzačního kritéria. Podle jednostranné verze limitního srovnávacího kritéria je tudíž konvergentní také řada $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k}$.

[12]) Například $\varepsilon = \frac{p-1}{2}$ splňuje oba tyto požadavky.

2. Pokud $p < 1$, potom lze řadu $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k}$ srovnat s řadou $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{p+\varepsilon}}$, kde ε volíme kladné a takové, aby $p + \varepsilon < 1$.[13] Označíme-li $a_k = \frac{1}{k^p \ln^q k}$ a $b_k = \frac{1}{k^{p+\varepsilon}}$, potom vidíme, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^p \ln^q k}}{\frac{1}{k^{p+\varepsilon}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^\varepsilon}{\ln^q k} = +\infty$$

pro každé reálné číslo q. A protože $p + \varepsilon < 1$, řada $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{p+\varepsilon}}$ diverguje podle předchozího důsledku kondenzačního kritéria. Podle jednostranné verze limitního srovnávacího kritéria je tudíž divergentní také řada $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k}$.

3. Pokud $p = 1$ a $q \leq 0$, potom pro $k \geq 3$ platí, že $\ln k \geq 1$, a tedy také $\ln^{-q} k \geq 1$. Odtud vyplývá, že pro $k \geq 3$ platí odhad

$$\frac{1}{k^p \ln^q k} = \frac{1}{k \ln^q k} = \frac{\ln^{-q} k}{k} \geq \frac{1}{k}$$

a podle srovnávacího kritéria je vyšetřovaná řada $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k}$ divergentní, neboť je od třetího členu počínaje zespoda odhadnuta divergentní řadou $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$.

4. Konečně pokud $p = 1$ a $q > 0$, potom posloupnost $\left(\frac{1}{k \ln^q k}\right)$ je klesající s kladnými členy. Podle kondenzačního kritéria je tudíž konvergence řady $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^q k}$ ekvivalentní konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k) \ln^q(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^q(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(2^k)]^q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[k \ln 2]^q} = \frac{1}{[\ln 2]^q} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}.$$

Konvergence poslední řady je ovšem ekvivalentní konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$, o které víme, že je konvergentní, právě když $q > 1$, jinak diverguje. Tím je důkaz dokončen. □

1.4.4 Úlohy na podílové a odmocninové kritérium

Podílové kritérium lze často použít pro vyšetřování konvergence řad, jejichž koeficient obsahuje faktoriál nebo umocnění čísla či výrazu na k-tou. Podobně odmocninové kritérium se používá tehdy, pokud koeficient posloupnosti obsahuje mocninu výrazu na k-tou. Obě kritéria dávají podobné výsledky. Odmocninové kritérium je nepatrně silnější, neboť platí, že pokud existuje $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}$, potom existuje také limita $\lim \sqrt[k]{a_k}$ a tyto limity jsou si rovny. Toto tvrzení dokazovat nebudeme, neboť jej pro vyšetřování řad není potřeba. Opačné tvrzení neplatí, nicméně i tak rozdíl v síle kritérií není ve většině následujících úloh patrný.

Úloha I.3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Návod. Použijeme limitní podílové kritérium. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0.$$

Řada konverguje. □

Úloha I.4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Návod. Podle limitní verze podílového kritéria

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k = \frac{1}{e} < 1.$$

řada (absolutně) konverguje. □

Úloha I.5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{k^k}$

[13]) Například $\varepsilon = \frac{1-p}{2}$ splňuje oba tyto požadavky.

Návod. Podle limitní verze podílového kritéria

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{((k+1)!)^2}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{(k!)^2}{k^k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\cdot(k+1)=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k\cdot(k+1)=\frac{1}{e}\cdot(+\infty)=+\infty>1.$$

řada diverguje. □

Úloha I.6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

Návod. Použijeme limitní podílové kritérium. Je

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}}{\frac{(k!)^2}{(2k)!}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)}=\frac{1}{4}<1.$$

Řada konverguje. □

Úloha I.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

Návod. Řada nekonverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n}=\frac{1}{e}\neq 0.$$

□

Úloha I.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+1/n)^n}$

Návod. Řada konverguje, neboť $\frac{1}{(2+1/n)^n}\leq\frac{1}{2^n}$. Jinou možnost skýtá použití limitní verze odmocninového kritéria,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2+1/n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+1/n}=\frac{1}{2}<1.$$

□

Úloha I.9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A^k k!}{k^k}$, kde $A\geq 0$

Návod. Budeme rozhodovat podle limitní verze podílového kritéria. Je

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{A^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{A^k k!}{k^k}}=\lim_{k\to\infty}A\left(\frac{k}{k+1}\right)^k=\lim_{k\to\infty}A\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k=\frac{A}{e}.$$

Pro $0\leq A<e$ řada konverguje, pro $A>e$ řada diverguje. Musíme rozhodnout případ $A=e$. Spočtěme limitu

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\left(\frac{e}{k}\right)^k k!=$$

podle Stirlingovy formule[14]

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e}{k}\right)^k\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k=+\infty,$$

a proto řada diverguje, neboť posloupnost koeficientů nejde k nule a není tedy splněna nutná podmínka konvergence. □

Úloha I.10. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^{ak}}{k!}$

[14]) Ale stačila by i věta o dvou policajtech společně s odhady $e(\frac{k}{e})^k\leq k!\leq ke(\frac{k}{e})^k$.

Návod. Položme $a_k = \frac{k^{ak}}{k!}$. Protože

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^{a(k+1)}}{(k+1)!}}{\frac{k^{ak}}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^a}{k+1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{ak} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (k+1)^{a-1} \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^a$$

a protože podle Heineho věty a věty o limitě složené funkce vzhledem ke spojitosti mocninné funkce y^a v bodě e máme

$$\lim_{k\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^a = e^a,$$

dostáváme postupně:

(i) pro $a < 1$ je $\lim(k+1)^{a-1} = 0$, a tedy $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0 < 1$ a řada konverguje.

(ii) pro $a = 1$ je $\lim(k+1)^{a-1} = 1$, a tedy $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = e > 1$ a řada diverguje.

(iii) pro $a > 1$ je $\lim(k+1)^{a-1} = +\infty$, a tedy $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = +\infty > 1$ a řada diverguje. □

Úloha I.11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{2^{k^2}}$

Návod. Položme $a_k = \frac{(k!)^2}{2^{k^2}}$. Protože

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{((k+1)!)^2}{2^{(k+1)^2}}}{\frac{(k!)^2}{2^{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{2^{(2k+1)}} = 0 < 1,$$

řada konverguje. □

Úloha I.12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{k}\right)^k}$

Návod. Položme $a_k = \frac{k^2}{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{k}\right)^k}$. Zřejmě

$$a_k \leq \frac{k^2}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^k}.$$

Položme $b_k = \frac{k^2}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^k}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^2}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{k+1}}}{\frac{k^2}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{3}{\pi} = \frac{3}{\pi} < 1,$$

a proto řada $\sum b_k$ konverguje podle podílového kritéria. Protože $0 \leq a_k \leq b_k$, řada $\sum a_k$ konverguje podle srovnávacího kritéria. □

Úloha I.13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{k}{k\sqrt{2}+1}.$

Návod. Použijeme odmocninové kritérium. Podle věty o limitě složené funkce platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\arcsin^k \frac{k}{k\sqrt{2}+1}} = \lim_{k\to\infty} \arcsin \frac{k}{k\sqrt{2}+1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} < 1,$$

a tudíž řada konverguje. □

Úloha I.14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{k+p}}$

Návod. Položme $a_k = \frac{k!}{k^{k+p}}$. Zřejmě

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1+p}}}{\frac{k!}{k^{k+p}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{(k+1)^{1+p}} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+p} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (k+1)^{-p} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k} \cdot \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{p}.$$

Protože prostřední výraz

$$\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k} \to \frac{1}{e} \quad \text{pro} \quad k \to \infty$$

a poslední výraz

$$\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{p} \to 1^p = 1 \quad \text{pro} \quad k \to \infty$$

(podle Heineho věty a limity složené funkce díky spojitosti mocniny v bodě 1), rozhoduje o limitě první výraz.

(i) Je-li $p < 0$, pak $(k+1)^{-p} \to +\infty$, tudíž $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = +\infty$ a řada diverguje.

(ii) Je-li $p = 0$, pak $(k+1)^{-p} \to 1$, tudíž $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{e}$ a řada konverguje.

(iii) Je-li $p > 0$, pak $(k+1)^{-p} \to 0$, tudíž $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$ a řada konverguje. □

Úloha I.15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k^2+k+1)^{k/2}}$

Návod. Položme $a_k = \frac{k^k}{(2k^2+k+1)^{k/2}}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{2k^2+k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+1/k+1/k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

a řada konverguje podle odmocninového kritéria. □

Úloha I.16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4k-3)}$

Návod. Položme $a_k = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4k-3)}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3(k+1)-1}{4(k+1)-3} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+2}{4k+1} = \frac{3}{4} < 1$$

a řada konverguje podle podílového kritéria. □

V následujících příkladech vyšetřujte absolutní konvergenci řad.

Úloha I.17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$, kde $z \in \mathbb{C}$.

Návod. Podle (limitního) podílového kritéria vyšetříme konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, kde $a_k = \frac{z^{2k}}{(2k)!}$. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|z|^{2k+2}}{(2k+2)!}}{\frac{|z|^{2k}}{(2k)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^2}{(2k+1)(2k+2)} = 0 < 1.$$

Tudíž řada konverguje pro každé $z \in \mathbb{C}$. □

Úloha I.18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, kde $z \in \mathbb{C}$.

Návod. Podle (limitního) podílového kritéria vyšetříme konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, kde $a_k = \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|z|^{2k+3}}{(2k+3)!}}{\frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0 < 1.$$

Tudíž řada konverguje pro každé $z \in \mathbb{C}$. □

Úloha I.19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$, kde $z \in \mathbb{C}$.

Návod. Postup je stejný jako u úlohy (I.17), neboť absolutní hodnota koeficientu $|a_k| = \frac{|z|^{2k}}{(2k)!}$. □

Úloha I.20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, kde $z \in \mathbb{C}$.

Návod. Postup je stejný jako u úlohy (I.18), neboť absolutní hodnota koeficientu $|a_k| = \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!}$. □

Úloha I.21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z^k}$, kde $z \in \mathbb{C}$.

Návod. Podle (limitního) podílového kritéria vyšetříme konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, kde $a_k = \frac{k}{z^k}$. Počítejme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{|z|^{k+1}}}{\frac{k}{|z|^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}\frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|}.$$

Pro $|z| > 1$ řada absolutně konverguje, pro $|z| < 1$ řada diverguje podle limitního podílového kritéria. Pokud $|z| = 1$, potom $|a_k| = k \not\to 0$ pro $k \to \infty$, a tedy $a_k \not\to 0$ pro $k \to \infty$ a řada diverguje taktéž, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence. □

Úloha I.22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k}$, kde $z \in \mathbb{C}$.

Návod. Podle (limitního) podílového kritéria vyšetříme konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, kde $a_k = \frac{z^{k^2}}{2^k}$. Počítejme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|z|^{(k+1)^2}}{2^{k+1}}}{\frac{|z|^{k^2}}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{2}.$$

Pro $|z| > 1$ řada diverguje, pro $|z| < 1$ řada konverguje podle limitního podílového kritéria. Pokud $|z| = 1$, potom $a_k = \frac{1}{2^k}$, dostáváme tak geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{2}$, která je samozřejmě konvergentní.

Shrnutí: Řada absolutně konverguje pro $|z| \leq 1$, diverguje jinak. □

Úloha I.23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$, kde $z \in \mathbb{C}$.

Návod. Podle limitního podílového kritéria

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|z|^{(k+1)!}}{|z|^{k!}} = \lim_{k\to\infty} |z|^{k\cdot k!}$$

řada konverguje, pokud $|z| < 1$ a diverguje, pokud $|z| > 1$. Pokud $|z| = 1$, řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence, $z^{k!} \not\to 0$ pro $k \to \infty$. □

Úloha I.24. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^k \dfrac{2kx}{x^2+k^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Návod. Použijeme odmocninové kritérium. Podle věty o limitě složené funkce platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\operatorname{arctg}^k \frac{2kx}{x^2+k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{2k|x|}{x^2+k^2} = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

a tudíž řada (absolutně) konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. □

Úloha I.25. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k}{3^k}$.

Návod. Drobná perlička na závěr. Lze pochopitelně užít podílové i odmocninové kritérium (výsledek příslušné limity je pokaždé $\frac{2}{3}$), což značí konvergenci řady) Z identity $\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ plyne, že řada je geometrická s kvocientem menším než 1. Řada je tedy zřejmě konvergentní — dokonce lze snadno určit její součet. □

1.4.5 Úlohy na srovnávací kritérium

Úloha I.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Návod: Řada nekonverguje, neboť $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$. Zbytek je srovnání s harmonickou řadou.

Úloha I.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

Návod: Podle kondenzačního kritéria jsme odvodili, že řady typu $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergují, kdykoliv je $p > 1$. Protože $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ a $3/2 > 1$, řada konverguje.

Úloha I.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$

Návod: Řada diverguje, neboť $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ (a zbytek plyne srovnáním s harmonickou řadou).

Úloha I.29. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln k}$

Návod. Protože $\frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{k}$ a $\sum \frac{1}{k}$ diverguje, vyšetřovaná řada diverguje. Divergence řady $\frac{1}{k}$ vyplývá z integrálního kritéria, neboť

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty.$$

Úloha I.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$

Návod: Podíl n/n^2 věští, že použijeme srovnání s harmonickou řadou $\sum \frac{1}{n}$, o níž je známo, že diverguje. Nejprve odhadneme, že

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Ale řada $\sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$ diverguje, protože diverguje harmonická řada. Podle srovnávacího kritéria je původní řada $\sum \frac{n}{n^2+1}$ divergentní.

Úloha I.31. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{k^3+1}$

Návod. Protože

$$\frac{k^2}{k^3+1} \geq \frac{k^2}{k^3+k^3} = \frac{1}{2k}$$

a řada $\sum \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k}$ diverguje, vyšetřovaná řada diverguje podle srovnávacího kritéria.

Nebo položme $a_k = \frac{k^2}{k^3+1}$ a $b_k = \frac{1}{k}$. Ukážeme, že $a_k \sim b_k$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \text{ existuje a je to nenulové reálné číslo.}$$

Zřejmě platí, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{k^3+1} = 1.$$

Tudíž řady $\sum a_k$ a $\sum b_k$ podle limitní verze srovnávacího kritéria konvergují nebo divergují zároveň. Řada $\sum b_k = \sum \frac{1}{k}$ diverguje, takže vyšetřovaná řada $\sum a_k$ diverguje také.

Úloha I.32. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3k+4}{(2k^2+5)^2}$

Návod. Buď použijte srovnávacího kritéria a odhadu

$$\frac{2k^2+3k+4}{(2k^2+5)^2} = \frac{2k^2+3k+4}{4k^4+20k^2+25} \leq \frac{2k^2+3k+4}{4k^4} \leq \frac{2k^2+3k^2+4k^2}{4k^4} = \frac{9}{4}\frac{1}{k^2}.$$

Nebo ukažte, že $\frac{2k^2+3k+4}{(2k^2+5)^2} \sim \frac{1}{k^2}$, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2k^2+3k+4}{(2k^2+5)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria vyplývá z konvergence řady $\sum \frac{1}{k^2}$ také konvergence vyšetřované řady.

Úloha I.33. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}}$

Návod. Je $\frac{1}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}} \sim \frac{1}{k}$, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria vyplývá z divergence řady $\sum \frac{1}{k}$ také divergence vyšetřované řady.

Úloha I.34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$

Návod: Řada konverguje podle srovnávacího kritéria, neboť

$$\frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3} = \frac{n\sqrt{n}}{n^3} \cdot \frac{1+2n^{-1/2}}{2+1/n} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1+2}{2+0} = \frac{3}{2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Úloha I.35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}.$

Návod: Pokud $p < 0$, potom $n^p \leq 1$ a řada konverguje pro všechny hodnoty $q \in \mathbb{R}$ podle srovnání

$$\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3} \leq \frac{2}{n^2-3}.$$

Pokud $0 < p < 1$, pak řada opět konverguje pro všechna $q \in \mathbb{R}$, neboť $2-p > 1$ a

$$\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3} = \frac{1+1/n^p}{n^{q-p}+n^{2-p}-3n^{-p}} \leq \frac{2}{n^{2-p}-3}.$$

Pokud $p \geq 1$, potom řada konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $q - p > 1$. Je-li tato podmínka splněna, plyne konvergence řady ze srovnání

$$\frac{n^p + 1}{n^q + n^2 - 3} = \frac{1 + 1/n^p}{n^{q-p} + n^{2-p} - 3n^{-p}} \leq \frac{2}{n^{q-p} - 3}.$$

Není-li podmínka splněna, tj. je-li $p \geq 1$ a zároveň $q - p \leq 1$, pak divergence řady plyne ze srovnání

$$\frac{n^p + 1}{n^q + n^2 - 3} = \frac{1 + 1/n^p}{n^{q-p} + n^{2-p} - 3n^{-p}} \geq \frac{1}{n^{q-p} + n^{2-p} - 3n^{-p}} = \frac{1}{n}\frac{1}{n^{q-p-1} + n^{1-p}(1 - 3/n^2)} \geq \frac{1}{n}$$

od jistého vhodného n počínaje, neboť ve druhém zlomku jsou ve jmenovateli nekladné mocniny.

Úloha I.36. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\ln k}$

Návod: Použijeme srovnávací kritérium. Pro $k > e^2$ je $k^{-\ln k} = \frac{1}{k^{\ln k}} < \frac{1}{k^2}$. Řada konverguje, neboť konverguje řada $\sum \frac{1}{k^2}$.

Úloha I.37. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^k - 2^k}{3^k + 2^k}$

Návod: Platí, že

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k - 2^k}{3^k + 2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^k} \cdot \frac{1 - (2/3)^k}{1 + (2/3)^k} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Řada diverguje, neboť její koeficienty nesplňují nutnou podmínku pro konvergenci: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Úloha I.38. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^7}{2^k + 3^k}$

Návod: Nejprve odhadneme $\frac{k^7}{2^k+3^k} \leq \frac{k^7}{3^k}$. Řada $\sum \frac{k^7}{3^k}$ konverguje podle Abelova podílového kritéria, neboť je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^7}{3^{k+1}}}{\frac{k^7}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^7 = \frac{1}{3} < 1.$$

Původní řada pak konverguje podle srovnávacího kritéria.

Úloha I.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 + 1}{2^n - 1}$

Návod: Nejprve odhadneme tak, že zvětšíme čitatel.

$$\frac{n^2 + 1}{2^n - 1} \leq \frac{n^2 + n^2}{2^n - 1} = \frac{2n^2}{2^n - 1}$$

Nyní řada $\sum \frac{n^2}{2^{n-1}-1}$ konverguje podle Abelova kritéria, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-1} - 1/2^n}{1 - 1/2^n} = \frac{2^{-1}}{1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Pomocí srovnávacího kritéria dostáváme, že původní řada je konvergentní.

Úloha I.40. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{2 + (-1)^k}{7}\right)^k.$

Návod: Nejprve použijeme odhad

$$\frac{2 + (-1)^k}{7} \leq \frac{3}{7},$$

a tudíž

$$\left(\frac{2+(-1)^k}{7})\right)^k \le \left(\frac{3}{7}\right)^k.$$

Řada konverguje podle srovnávacího kritéria, neboť řada $\sum_{k=1}^{\infty}(3/7)^k$ je geometrická s kvocientem mezi nulou a jedničkou, tedy je konvergentní.

Úloha I.41. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}}$.

Návod: Nejprve vhodně rozšíříme, pak upravíme a nakonec odhadneme.

$$\frac{\sqrt[3]{k^2+7}-\sqrt[3]{k^2+3}}{\sqrt[4]{k}} = \frac{(k^2+7)-(k^2+3)}{\sqrt[4]{k}}\frac{1}{\sqrt[3]{(k^2+7)^2}+\sqrt[3]{k^2+7}\sqrt[3]{k^2+3}+\sqrt[3]{(k^2+3)^2}} =$$

$$= \frac{4}{k^{1/4+4/3}}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+7/k^2)^2}+\sqrt[3]{1+7/k^2}\sqrt[3]{1+3/k^2}+\sqrt[3]{(1+3/k^2)^2}} \le \frac{4}{k^{4/3}}.$$

Konvergence podle srovnávacího kritéria je nyní zřejmá.

Úloha I.42. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha}$.

Návod: Nejprve vhodně rozšíříme, pak upravíme a nakonec uvidíme.

$$\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha} = \frac{4}{k^\alpha}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k-2}} = \frac{4}{k^{\alpha+1/2}}\frac{1}{\sqrt{1+2/k}+\sqrt{1-2/k}}.$$

Řada konverguje, pokud $\alpha > \frac{1}{2}$ (druhý zlomek lze odhadnout seshora jedničkou) a diverguje, pokud je $\alpha \le \frac{1}{2}$ (druhý zlomek lze odhadnout zespoda hodnotou v $k = 2$, která je $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

Úloha I.43. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{kx}}{k}$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Návod. Pokud $x > 0$, řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence, $e^{kx}/k \not\to 0$ pro $k \to \infty$. Pokud $x = 0$, řada diverguje, neboť jde o harmonickou řadu. Pokud $x < 0$, řada konverguje srovnáním s geometrickou řadou, neboť $e^{kx}/k \le e^{kx} = (e^x)^k$, přičemž kvocient $e^x < 1$. □

Úloha I.44. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{kx}}{k^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Návod. Pokud $x > 0$, řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence, $e^{kx}/k \not\to 0$ pro $k \to \infty$. Pokud $x = 0$, řada konverguje, neboť jde o řadu $\sum\frac{1}{k^2}$. Pokud $x < 0$, řada konverguje srovnáním s geometrickou řadou, neboť $e^{kx}/k^2 \le e^{kx} = (e^x)^k$, přičemž kvocient $e^x < 1$. □

Úloha I.45. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\ln(k+1)}}$.

Návod. Řada diverguje, neboť

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\ln(k+1)} = \lim_{k\to\infty}(\ln(k+1))^{1/k} = \lim_{k\to\infty}e^{\frac{1}{k}\ln(\ln(k+1))} = e^0 = 1,$$

a tedy nesplňuje základní podmínku konvergence. □

Úloha I.46. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$

Návod. Použijeme limitní srovnávací kritérium, budeme srovnávat s harmonickou řadou, tj. řadou s koeficienty $\frac{1}{k}$. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k\sqrt[k]{k}}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1.$$

$\square$

Úloha I.47. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2kx}{x^2+k^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Návod. Pokud $x = 0$, řada má nulové koeficienty a konverguje. Pokud $x \neq 0$, použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1,$$

odkud vyplývá (substitucí $y = \frac{2kx}{x^2+k^2}$), že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{2kx}{x^2+k^2}}{\frac{2kx}{x^2+k^2}} = 1,$$

a proto řada $\sum_k \operatorname{arctg} \frac{2kx}{k^2+x^2}$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_k \frac{2kx}{x^2+k^2}$. Jednoduchým srovnáním ale dostaneme, že od určitého členu počínaje, kdy je $k^2 \geq x^2$, platí

$$\frac{2kx}{x^2+k^2} \geq \frac{2kx}{2k^2} = \frac{x}{k},$$

přičemž řada napravo diverguje pro každé $x \neq 0$.

Závěr. Řada konverguje pro $x = 0$, jinak diverguje. $\square$

Úloha I.48. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{k^a} - 1\right)$

Návod. Pokud $a \geq 0$, pak $\lim \left(k^{k^a} - 1\right) = +\infty$, řada tedy diverguje, neboť není splněna základní podmínka konvergence $\lim a_k = 0$.

Pokud $a < 0$, pak platí

$$k^{k^a} - 1 = e^{k^a \ln k} - 1,$$

a tudíž (podle Heineho věty a věty o limitě složené funkce s přihlédnutím k faktu, že $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = 0$ pro $a < 0$)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k^a} - 1}{k^a \ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k^a \ln k} - 1}{k^a \ln k} = 1.$$

Stačí tedy podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřit řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{\ln k}$$

pro $a < 0$. O této řadě víme, že pro $0 > a \geq -1$ je divergentní a pro $a < -1$ řada konverguje.

Úloha I.49. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right)$

Návod. Protože

$$\left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right) = e^{\frac{\ln k}{k^2+1}} - 1$$

a výraz v exponentu konverguje pro $k \to \infty$ k nule (například podle Heineho věty a l'Hopitalova pravidla), dostáváme s přihlédnutím k Heineho větě, větě o limitě složené funkce a základní limity $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ pro $x \to 0$, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln k}{k^2+1}} - 1}{\frac{\ln k}{k^2+1}} = 1.$$

Podle limitní verze srovnávacího kritéria tedy vyšetřovaná řada konverguje, právě když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2+1}.$$

Ukážeme, že tato řada konverguje. K tomu nám poslouží dvojice odhadů

$$\frac{\ln k}{k^2+1} \leq \frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}},$$

přičemž první nerovnost platí pro každé k přirozené, o druhé ukážeme, že existuje přirozené N takové, že platí pro každé $k > N$. Jestliže tak učiníme, potom konvergence plyne ze srovnávacího kritéria a konvergence řady $\sum \frac{1}{k^p}$ pro $p > 1$.

Tvrdíme tedy, že existuje přirozené N takové, že pro každé $k > N$ je

$$\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \leq 1.$$

Podle Heineho věty a l'Hopitalova pravidla máme, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}} = 0.$$

Volme tedy $\epsilon = 1$. Z definice limity vyplývá, že existuje N přirozené tak, že pro každé $k > N$ je $|\frac{\ln k}{\sqrt{k}} - 0| < \epsilon$, a tudíž, protože číslo nalevo je kladné, je $\frac{\ln k}{\sqrt{k}} < \epsilon = 1$. Tím je tvrzení dokázáno.

Úloha I.50. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{k}}$

Návod. Stačí ukázat, že existuje N přirozené takové, že pro každé $k > N$ je

$$e^{-\sqrt[3]{k}} \leq \frac{1}{k^2} \iff \frac{k^2}{e^{\sqrt[3]{k}}} \leq 1.$$

Za tím účelem počítejme limitu napravo pro $k \to \infty$. Použitím Heineho věty, substituce $y = \sqrt[3]{x}$ a šesterým použitím L'Hopitalova pravidla dostaneme, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{e^{\sqrt[3]{k}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^6}{e^y} \overset{l'H}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{6!}{e^y} = 0.$$

Tudíž z definice limity pro libovolné $\epsilon > 0$ (speciálně $\epsilon = 1$) existuje N takové, že pro každé $k > N$ je $\frac{k^2}{e^{\sqrt[3]{k}}} < \epsilon$, čímž je nerovnost dokázána. Řada tudíž konverguje podle srovnávacího kritéria vzhledem ke konvergenci řady $\sum \frac{1}{k^2}$.

Úloha I.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

Návod. Snadno se ověří, že všechny koeficienty $a_n = n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ jsou nezáporné. Ukážeme, že $a_n \not\to 0$ pro $n \to \infty$. Je totiž

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty,$$

kde pro výpočet limity posledního zlomku použijeme Heineho větu, substituci $x = \frac{1}{n}$ a limitu $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Úloha I.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln\frac{n+1}{n}$

Návod. Položme $a_n = \sin n^{-1} \ln\frac{n+1}{n}$. Ukážeme, že a_n lze porovnat s $\frac{1}{n^2}$ a tudíž řada podle limitní verze srovnávacího kritéria konverguje. Podle Heineho věty a substituce $x = \frac{1}{n}$ totiž máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

takže použitím obou limit dohromady dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Úloha I.53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{n^2+1}$

Návod. S přihlédnutím k Heineho větě totiž jednoduchým rozšířením dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Řada tudíž diverguje srovnáním s harmonickou řadou.

Úloha I.54. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k\sin^{2k} x)$, kde $x \in \mathbb{R}$.

Návod. Pro $x = 0 + 2k\pi$ a $x = \pi + 2k\pi$ je řada evidentně divergentní. Jinak použijeme limitní srovnávací kritérium.

Použitím odmocninového kritéria pro limity nahlédneme, že platí $\lim k\sin^{2k} x = 0$ pro $x \neq k\pi$, neboť platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\sin^{2k} x} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \sin^2 x = \sin^2 x < 1.$$

Proto také platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\exp(-k\sin^{2k} x)}{=} e^0 = 1 \neq 0,$$

a tudíž řada musí také divergovat, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence. □

Úloha I.55. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{\sqrt{(k^2-k+1)^{k+1}}}$.

Návod. Upravíme

$$\frac{k^{k-1}}{\sqrt{(k^2-k+1)^{k+1}}} = \frac{k^{k-1}}{k^{k+1}\sqrt{(1-1/k+1/k^2)^{k+1}}} = \frac{1}{k^2}\frac{1}{\sqrt{(1-1/k+1/k^2)^{k+1}}}.$$

Nyní stačí spočítat, že

$$\lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\right)^{k+1} = \exp\left[\lim_{k\to\infty} (k+1)\ln\left(1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{k\to\infty} (k+1)\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+o(k^{-2})\right)\right] = e^{-1},$$

tudíž

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(1-1/k+1/k^2)^{k+1}}} = \frac{1}{e^{-1/2}} = e^{1/2},$$

a tudíž

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}\frac{1}{\sqrt{(1-1/k+1/k^2)^{k+1}}}}{\frac{1}{k^2}} = e^{1/2}.$$

Řada konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (srovnáním s řadou $\sum\frac{1}{k^2}$). □

Úloha I.56. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\alpha^k)}{\alpha^k}$, kde $\alpha > 0$.

Návod. Pokud $\alpha = 1$, potom řada diverguje, neboť má konstantní koeficienty $\ln 2$.

Pokud $\alpha > 1$, potom $\alpha^k \to +\infty$ a platí, že

$$\frac{\ln(1+\alpha^k)}{\alpha^k} \leq \frac{\ln(2\alpha^k)}{\alpha^k} = \frac{\ln 2 + k \ln \alpha}{\alpha^k} = \frac{\ln 2}{\alpha^k} + \frac{k}{\alpha^k} \ln \alpha.$$

Řada $\sum \frac{\ln 2}{\alpha^k}$ konverguje, neboť je geometrická s kvocientem $\frac{1}{\alpha} < 1$. Řada $\sum \frac{k}{\alpha^k}$ konverguje například podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{\alpha^{k+1}}}{\frac{k}{\alpha^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Pro $\alpha > 1$ tedy řada konverguje srovnáním se součtem dvou konvergentních řad.

Pokud $0 < \alpha < 1$, potom $\alpha^k \to 0$ pro $k \to \infty$ a platí (třeba podle l'Hopitalova pravidla), že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^x)}{\alpha^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\alpha^x} \cdot \alpha^x \ln \alpha}{\alpha^x \ln \alpha} = 1 \neq 0,$$

řada tedy musí divergovat, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence. □

1.4.6 Další úlohy na konvergenci řad s nezápornými členy

Sečtěte následující řady.

Úloha I.57. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Návod: Platí, že

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Částečné součty předchozí řady jsou tedy:

$$s_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Zjevně

$$s_k \xrightarrow{k\to\infty} 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{k\to\infty} s_k = 1.$$

Úloha I.58. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.

Návod: Platí, že

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k+1)(k-1)} = \frac{A}{k-1} - \frac{B}{k+1},$$

kde čísla A, B určíme opětovným sečtením:

$$\frac{A}{k-1} - \frac{B}{k+1} = \frac{Ak + A - Bk + B}{(k+1)(k-1)} \implies A - B = 0,\ A + B = 1 \implies A = B = \frac{1}{2}.$$

Platí tedy

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)}.$$

Pro částečné součty pak platí:

$$s_k = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(k-1)(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{k+1}.$$

Evidentně je

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2}\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Úloha I.59. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a \ln^b k \ln^c(\ln k)}$

Návod. Obdobnými úvahami jako v důsledku 1.20 lze ukázat, že řada konvegruje pro $a > 1$, $b, c \in \mathbb{R}$ a diverguje, pokud $a < 1$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Srovnáním s řadou typu $\frac{1}{k^a \ln^b k}$ lze ukázat, že řada konverguje pro $a = 1$, $b > 1$, $c \in \mathbb{R}$ a diverguje pro $a = 1$, $b < 1$, $c \in \mathbb{R}$. Ukážeme například konvergenci: je-li $b > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, aby $b - \varepsilon > 1$ a platí

$$\sum_k \frac{1}{k \ln^b k \ln^c(\ln k)} = \sum_k \frac{1}{k ln^{b-\varepsilon} k} \cdot \frac{\ln^{-c}(\ln k)}{\ln^{\varepsilon} k},$$

přičemž podle důsledku 1.20 víme, že $\sum \frac{1}{k \ln^{b-\varepsilon} k}$ konverguje a platí, že $\frac{\ln^{-c}(\ln k)}{\ln^{\varepsilon} k} \to 0$ pro $k \to \infty$ (což lze dokázat například posuzováním této limity jako limity funkce a substitucí $k = e^y$), tudíž je speciálně omezená. Konvergence plyne srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{k \ln^{b-\varepsilon} k}$.

Případ $a = 1$, $b = 1$ rozhodne kondenzační kritérium. Opět lze dokázat výpočtem derivace funkce $\frac{1}{x \ln x \ln^c(\ln x)}$, že konvergence příslušné posloupnosti do nuly je monotónní. Potom řada $\sum_k \frac{1}{k \ln k \ln^c(\ln k)}$ konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li řada

$$\sum_k 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln(2^k) \ln^c(\ln 2^k)} = \sum_k \frac{1}{k \ln^c k}.$$

O řadě napravo ale víme z důsledku 1.20, že konverguje, právě pokud $c > 1$ a diverguje, pokud $c \le 1$.

Shrnutí: Řada konverguje, pokud $a > 1$, $b, c \in \mathbb{R}$ nebo $a = 1$, $b > 1$, $c \in \mathbb{R}$ nebo $a = b = 1$, $c > 1$. Jinak diverguje. $\square$

1.4.7 Teoretické úlohy

Úloha I.60. Dokažte, nebo najděte protipříklad.

a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.

b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.

d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge 1$.

e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge n_0$.

Návod: a) Nechť $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (částečný součet první řady) a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} + a_{2k})$ (částečný součet druhé řady). Potom platí, že $\sigma_n = s_{2n}$, a tedy posloupnost částečných součtů druhé řady tvoří podposloupnost částečných součtů řady první. A protože libovolná podposloupnost konvergentní posloupnosti konverguje (a to ke stejné limitě), je tvrzení pravdivé.

b) Tvrzení není pravdivé. Uvažte posloupnost $a_n = (-1)^n$. Potom první řada $\sum a_n$ má vlastně podobu $-1+1-1+1-1+1$ a osciluje, kdežto druhá $\sum(a_{2n-1} + a_{2n})$ má podobu $0+0+0+0+\ldots$ a je zjevně konvergentní.

c) Tvrzení není pravdivé. Řada $\sum \frac{1}{n}$ není konvergentní.

d), e) Tvrzení jsou zjevně nepravdivá, co třeba řady se zápornými členy $\sum -\frac{1}{n^2}$. Ale i pokud předpokládáme, že $a_n \ge 0$ pro každé přirozené n, přesto najdeme protipříklad. Uvažte posloupnost

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}, \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{(2n)^2}.$$

Potom je celkem zřejmé, že $a_{2n+1} \ge a_{2n}$. Přitom řada $\sum a_n$ je konvergentní, neboť $a_{2n} \le a_{2n+1} \le \frac{1}{n^2}$ a řada tedy konverguje podle srovnávacího kritéria.

Úloha I.61. Dokažte, nebo najděte protipříklad.

a) Pokud $a_n \geq 0$ a $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$, potom $\sum a_n$ konverguje.

b) Pokud $a_n \geq 0$ a $\sum a_n$ konverguje, potom $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

Návod: b) Předpokládejme, že $a_n \geq 0$ a že $L = \limsup na_n > 0$. Pak pro nekonečně mnoho n je $na_n > (L - \varepsilon) > 0$ (pro vhodně malé ε), a tedy $a_n > \frac{L-\varepsilon}{n}$. Řada podle srovnávacího kritéria konvergovat nemůže. Tvrzení b) je tedy pravdivé.

a) Tvrzení je nepravdivé, dokonce i tehdy, je-li $a_n \geq 0$. Protipříklad skýtá například řada $\sum \frac{1}{n \ln n}$. Její divergence byla dokázána v části věnované kondenzačnímu kritériu.

Poznámka. Díky Leibnizovu kritériu brzy uvidíme, že bez předpokladu $a_n \geq 0$ neplatí ani tvrzení b). Standardní protipříklad poskytuje řada $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, která je (neabsolutně) konvergentní.

1.4.8 Typické limity elementárních funkcí používané pro srovnávací kritérium

Každá z následujících úloh obsahuje, kromě jiného, použití limity, která některou z elementárních funkci srovnává s mocninnou, typicky lineární funkcí v daném bodě. Ukazuje se, že takové srovnání je možné pro většinu elementárních funkcí ve vlastních i nevlastních bodech. Pomocí příslušných limit pak můžeme tyto elementární funkce nahradit mocninnými funkcemi a výslednou řadu srovnat s vhodnou p-řadou, tj. řadou typu $\sum \frac{1}{k^p}$. Tento postup lze použít i v případě složených funkcí, kdy postupně nahrazujeme vnější funkce vhodnou mocninnou funkcí jejich argumentů.

Srovnávání goniometrických funkcí

Vyšetřete konvergenci následujících řad.

Úloha I.62. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

Návod. □

Úloha I.63. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{m}\right) \cdot \sin n$

Návod. □

Úloha I.64. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$

Návod. □

Úloha I.65. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1}\right)$

Návod. □

Úloha I.66. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} \cdot \ln n$

Návod. □

Úloha I.67. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2^n}\right)$

Návod. □

Úloha I.68. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^n}\right)$

Návod. □

Úloha I.69. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} n^{\alpha} \operatorname{cotg} \frac{1}{n^2}$

Návod. □

Úloha I.70. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} n^{\alpha} \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} e^{-1/n}\right)$

Návod. □

Srovnávání cyklometrických funkcí

Úloha I.71. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

Návod. □

Úloha I.72. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\operatorname{arctg} n)^2$

Návod. □

Úloha I.73. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)^2$

Návod. □

Úloha I.74. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\operatorname{arccotg} n)^{3/2}$

Návod. □

Úloha I.75. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} \frac{1}{n}$

Návod. □

Úloha I.76. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{arccotg} \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \ln\left(1+2^n\right)$

Návod. □

Úloha I.77. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \arcsin\left(4^{-n}\right) \cdot e^n$

Návod. □

Úloha I.78. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n}{n+1} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

Návod. □

Úloha I.79. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+1}{n} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

Návod. Ačkoliv úloha vypadá velmi podobně jako úloha předchozí, protože $\frac{n+1}{n} > 1$, není koeficient řady vůbec definován. Úloha tudíž postrádá smyslu.[15] □

[15]) I definiční obor funkcí je nutné čas od času brát v úvahu.

Úloha I.80. $\sum_{k=1}^{\infty} \arccos \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

Návod. □

Srovnávání hyperbolických funkcí

Úloha I.81. $\sum_{k=1}^{\infty} \sinh \frac{1}{n^2} \cdot \cosh \frac{1}{n}$

Návod. □

Úloha I.82. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tgh} \frac{1}{n^2} \cdot \operatorname{cotgh} \frac{1}{n}$

Návod. □

Shrnutí užitých limit elementárních funkcí

Následující tabulka shrnuje limity použité v úlohách této části. Většinu z nich si lze rychle odvodit či dokázat pomocí l'Hopitalova pravidla.[16] Každá z nich vlastně formuluje jisté pravidlo nahrazení: výraz v čitateli limit odpovídá elementární funkci, přičemž x zastupuje obecný argument. Pokud zjistíme, že argument uvnitř elementární funkce jde pro $n \to \infty$ k limitnímu bodu příslušné limity v tabulce (např. pro $\sin \frac{1}{n^2}$ jde $\frac{1}{n^2} \to 0$ pro $n \to \infty$), potom podle Heineho věty a věty o limitě složené funkce můžeme elementární funkci se svým argumentem obvykle nahradit výrazem odpovídajícím jmenovateli příslušné limity, který obsahuje pouze x, tj. pouze argument (pro zmiňovaný $\sin \frac{1}{n^2}$ to znamená podle limity vlevo v druhém řádku tabulky možnost nahradit tento výraz výrazem $\frac{1}{n^2}$).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} x}{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg} x}{\frac{\pi}{2} - x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arccotg} x - \frac{\pi}{2}}{x} = -1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \cosh x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotgh} x}{\frac{1}{x}} = 1$$

[16]) Ačkoliv u některých z nich to nemusí být z teoretického hlediska „košer“, protože se pomocí nich odvozuje derivace příslušné funkce, nijak to nesnižuje kontrolní hodnotu takového výpočtu.

1.5 Konvergence řad s obecnými členy

V předchozí části této kapitoly o číselných řadách jsme se věnovali řadám s nezápornými členy. Přitom jsme zmínili, že dokázaná kritéria lze, alespoň zčásti, použít také pro řady s obecnými (reálnými nebo komplexními) členy. Máme totiž dokázánu následující větu:

Jestliže je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ s reálnými nebo komplexními koeficienty a navíc platí, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, potom konverguje také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Připomeňme, že pokud konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, pak o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ říkáme, že je **absolutně konvergentní** nebo že konverguje absolutně. Předchozí větu tedy můžeme vyslovit také v následující podobě:

Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, potom konverguje.

Již výše jsme zmínili, že existuje řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, která konverguje (tj. posloupnost jejích částečných součtů má vlastní limitu), ale nekonverguje absolutně (tedy automaticky $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = +\infty$, neboť řada nezáporných čísel má vždycky nezáporný součet). O takové řadě někdy říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

Příkladem takové řady je např. řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Dokažme to. Řada evidentně nekonverguje absolutně, neboť $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, přičemž poslední řada je harmonickou řadou, o které víme, že je divergentní.

Pro důkaz konvergence použijeme definice. Budeme tedy dokazovat, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ má vlastní limitu. Tuto posloupnost jejích částečných součtů (s_n) rozdělíme na dvě podposloupnosti, lichých a sudých členů. Zřejmě platí, že

$$s_{2n+1} = \frac{-1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}_{>0} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}}_{>0},$$

přičemž vidíme, že jdouce pouze po lichých členech posloupnosti, vždy přičítáme dva členy, které v součtu dávají kladné číslo, jak je naznačené ve výrazu výše. To nám říká, že posloupnost $(s_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, a tudíž má limitu. Označme ji S_1.

Naopak platí, že

$$s_{2n} = \underbrace{\frac{-1}{1} + \frac{1}{2}}_{<0} + \underbrace{\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}}_{<0} + \ldots + \underbrace{\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n}}_{<0},$$

přičemž vidíme, že jdouce pouze po sudých členech posloupnosti (s_n), vždy přičítáme dva členy, které v součtu dávají záporné číslo. To nám říká, že posloupnost $(s_{2n})_{n=1}^{\infty}$ je klesající, a tudíž má limitu. Označme ji S_2.

Nyní stačí dokázat, že obě limity obou podposloupností jsou stejné, tedy $S_1 = S_2$. Mají-li totiž podposloupnost lichých členů i podposloupnost sudých členů stejné limity, pak také celá posloupnost má tutéž limitu $S = S_1 = S_2$.[17] Vidíme ovšem, že

$$s_{2n+1} - s_{2n} = \left(\frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \ldots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) - \left(\frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \ldots + \frac{1}{2n} \right) = -\frac{1}{2n+1},$$

odkud vyplývá, že

$$s_{2n+1} = s_{2n} - \frac{1}{2n+1}.$$

Přechodem k limitě pro $n \to \infty$ na obou stranách rovnosti dostáváme (existenci limit posloupností na levé straně jsme totiž dokázali výše)

$$S_1 = S_2 - 0,$$

[17]) Stručně připomeňme důkaz: je-li společná limita vlastní, pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existují indexy n_1 a n_2 takové, že pro $n > n_1$, resp. $n > n_2$ je $|s_{2n+1} - S| < \varepsilon$, resp. $|s_{2n} - S| < \varepsilon$, což ale znamená, že pro $n > \max n_1, n_2$ jsou sudé i liché členy posloupnosti odlišné od S o méně než ε. Dokazované tvrzení tak plyne přímo z definice vlastní limity posloupnosti. Je-li společná limita $+\infty$, pak pro libovolné K reálné existují indexy n_1 a n_2 takové, že pro $n > n_1$, resp. $n > n_2$ je $s_{2n+1} > K$, resp. $s_{2n} > K$, což ale znamená, že pro $n > \max n_1, n_2$ jsou sudé i liché členy posloupnosti větší než K. Obdobně se postupuje pro poslední případ, kdy je společná limita $-\infty$.

což samozřejmě implikuje $S_1 = S_2$. Ještě musíme vyloučit, že příslušná společná limita $S = S_1 = S_2$ je nevlastní. Posloupnost (s_{2n+1}) je ovšem rostoucí, a tudíž nemůže mít limitu $-\infty$, naopak posloupnost (s_{2n}) je klesající, a tudíž nemůže mít limitu $+\infty$. Ani jeden z případů $S_1 = S_2 = +\infty$ a $S_1 = S_2 = -\infty$ tak není možný.

Téměř navlas stejný postup lze použít pro důkaz nejjednoduššího kritéria pro neabsolutní konvergenci – kritéria Leibnizova.

1.5.1 Leibnizovo kritérium

Věta 1.21. ***Leibnizovo kritérium.***

Nechť je dána řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k,$$

kde posloupnost (a_k) je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel splňující

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Potom je řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergentní.

Než přistoupíme k důkazu, uvedeme několik poznámek.

1. Řadě ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k,$$

kde a_k jsou nezáporné koeficienty, se říká **alternující řada**, neboť její členy střídavě mění znaménko.

2. Alternující řada splňuje nutnou podmínku konvergence, právě když $a_k \to 0$ pro $k \to \infty$, předpoklad o nulové limitě je tedy pro konvergenci nutnou podmínkou, nikoliv ale postačující, jak uvidíme v následující poznámce.

3. Všechny předpoklady na posloupnost (a_k) se někdy píší velmi stručně ve tvaru $a_k \searrow 0$, což právě značí, že posloupnost (a_k) je nerostoucí posloupnost konvergující k nule. Kritérium lze mírně zobecnit na posloupnosti (a_k), které *monotónně* konvergují k nule, tj. kromě konvergence k nule jsou buď nerostoucí nebo neklesající. Předpoklad monotonie, alespoň od nějakého indexu počínaje, je ale podstatný, bez něj tvrzení kritéria neplatí. Příkladem může být například alternující řada, pro kterou $a_{2k+1} = 0$ a $a_{2k} = \frac{1}{k}$. Potom je po dosazení evidentní, že $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, což je divergentní řada, i přesto, že $a_k \to 0$ pro $k \to \infty$.

Důkaz Leibnizova kritéria je, jak už jsme uvedli, obdobný důkazu konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ výše.

Důkaz Leibnizova kritéria. Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ označme s_n. Protože

$$s_{2n+1} = -a_1 + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1})$$

a posloupnost a_n je podle předpokladu nerostoucí, je v každé závorce výše kladné číslo, a tudíž posloupnost (s_{2n+1}) je neklesající, má tudíž limitu S_1. Podobně

$$s_{2n} = (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \ldots + (-a_{2n-1} + a_{2n}),$$

a protože posloupnost a_n je podle předpokladu nerostoucí, je v každé závorce výše záporné číslo, a tudíž posloupnost (s_{2n}) je nerostoucí, má tudíž limitu S_2. Zároveň platí

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1},$$

což přechodem k limitě pro $n \to \infty$ dává vzhledem k dokázané existenci limit obou posloupností (s_{2n+1}) a (s_{2n}) a vzhledem k předpokladu $\lim a_n = 0$, že

$$S_1 = S_2 + 0.$$

Tudíž podposloupnosti sudých a lichých členů posloupnosti částečných součtů (s_n) mají stejnou limitu $S = S_1 = S_2$, což znamená, že stejnou limitu má celá posloupnost (s_n). Zbývá vyloučit, že tato společná limita $S = S_1 = S_2$ je nevlastní. Posloupnost (s_{2n+1}) je ovšem rostoucí, a tudíž nemůže mít limitu $-\infty$, naopak posloupnost (s_{2n}) je klesající, a tudíž nemůže mít limitu $+\infty$. Ani jeden z případů $S_1 = S_2 = +\infty$ a $S_1 = S_2 = -\infty$ tak není možný. $\square$

Úlohy

Rozhodněte, zda následující řady neabsolutně konvergují.

Úloha I.83. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln k}$

Návod. Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\ln k}\xrightarrow{k\to\infty}0$. Posloupnost $\frac{1}{\ln k}$ je zjevně nerostoucí. Poznamenejme, že řada nekonverguje absolutně. To plyne pomocí srovnávacího kritéria srovnáním s $\frac{1}{k}$.[18] □

Úloha I.84. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$

Návod. Poznamenejme, že řada konverguje absolutně podle limitního srovnávacího kritéria srovnáním s $\left(\frac{2}{3}\right)^k$. Neabsolutní konvergenci tak není třeba vůbec vyšetřovat.

Lze nicméně použít i Leibnizovo kritérium. K tomu stačí ověřit, že

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k=0$$

a že tato konvergence je monotónní. Limita snadno vyplyne z věty o sevření a odhadu

$$\frac{2k+100}{3k+1}\leq\frac{2k+100}{3k}=\frac{2}{3}+\frac{100}{k}\leq\frac{5}{6}$$

pro $k>600$ a faktu, že $(5/6)^k\to0$.

Monotonie konvergence k nule znamená dokázat, že od jistého K počínaje je pro $k>K$

$$\left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k\geq\left(\frac{2(k+1)+100}{3(k+1)+1}\right)^{k+1}.$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{\left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k}{\left(\frac{2(k+1)+100}{3(k+1)+1}\right)^k}\geq\frac{2(k+1)+100}{3(k+1)+1}$$

$$\left(\frac{2k+100}{2k+102}\frac{3k+4}{3k+1}\right)^k\geq\frac{2k+102}{3k+4}$$

$$\left(1-\frac{2}{2k+102}\right)^k\left(1+\frac{3}{3k+1}\right)^k\geq\frac{2k+102}{3k+4}$$

Nyní třeba zalimicením obou stran dostaneme, že

$$\sqrt{e}\cdot\sqrt[3]{e}\geq\frac{2}{3},$$

což je pravdivá nerovnost. Předchozí nerovnost tedy musí být také od jistého velkého K pravdivá. □

Úloha I.85. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k.$

Návod. Řada nekonverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku $\lim a_k=0$. Kdyby tomu tak bylo, muselo by také platit, že $\lim|a_k|=0$. Jednoduchý výpočet ale dává

$$\lim_{k\to\infty}\left|(-1)^k\left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k\right|=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3k+1}{2k+100}\right)^k\geq$$

$$\geq\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3k}{2k+100}\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{2+100/k}\right)^k\geq\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{2,1}\right)^k=+\infty,$$

přičemž první nerovnost je jasná a druhá platí pro každé $k\geq1000$ (je tedy jistě splněna na nějakém okolí nekonečna). Je tedy $\lim|a_k|=+\infty$, což je spor s nutnou podmínkou konvergence řady. □

[18]) Nebo podle dříve dokázaného, viz důsledek 1.20 pro $p=0$, $q=1$.

Úloha I.86. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}$.

Návod. Řada nekonverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku $\lim a_k = 0$. Kdyby tomu tak bylo, muselo by také platit, že $\lim |a_k| = 0$. Jednoduchý výpočet ale dává

$$\lim_{k\to\infty}\left|(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2k^2+3k+4}{2k^2+4} = \lim_{k\to\infty}\frac{2+3/k+4/k^2}{2+4/k^2} = \frac{2+0+0}{2+0} = 1 \neq 0.$$

□

Rozhodněte, zda následující řady konvergují absolutně nebo neabsolutně, popřípadě pro jaké hodnoty parametrů.

Úloha I.87. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$. [Pro $x \neq \pm 1$ konverguje absolutně, pro $x = \pm 1$ nekonverguje.]

Návod. Pokud $x = 0$, řada konverguje absolutně (triviální). Odhad (zapomenutí členu x^{2k} ve jmenovateli)

$$\left|\frac{x^k}{1+x^{2k}}\right| \leq |x|^k$$

dává, že pro $|x| < 1$ řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

Pokud $x = \pm 1$, řada konvergovat nemůže, neboť $a_k = \frac{(\pm 1)^k}{1+(\pm 1)^{2k}} = \frac{(\pm 1)^k}{2} \not\to 0$.

Nechť nyní $|x| > 1$. Potom odhad (zapomenutí jedničky ve jmenovateli)

$$\left|\frac{x^k}{1+x^{2k}}\right| \leq \left|\frac{x^k}{x^{2k}}\right| = \frac{1}{|x|^k}$$

dává, že řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou. □

Úloha I.88. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$. [Konverguje absolutně.]

Návod. Platí, že (pro $k \geq 4$)

$$\left|(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}\right| = \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3} = \frac{1}{k^2}\frac{2+3/k+4/k^2}{2+3/k^4} \leq \frac{1}{k^2}\frac{2+1+1}{2} = \frac{2}{k^2}.$$

Tento odhad dává absolutní konvergenci naší řady pomocí srovnávacího kritéria. □

Úloha I.89. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$. [Konverguje neabsolutně.]

Návod. Odhad

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} = \frac{1}{k}\frac{2+3/k+4/k}{2} \geq \frac{1}{k}\frac{2}{2} = \frac{1}{k}$$

dává, že řada nemůže konvergovat absolutně podle srovnávacího kritéria (neboť harmonická řada není konvergentní). Je ale jednoduché ověřit, že

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Ukážeme, že konvergence je od jistého členu monotónní. Tedy, že

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} \geq \frac{2(k+1)^2+3(k+1)+4}{2(k+1)^3}.$$

Úpravou dostaneme

$$2(2k^2+3k+4)(k+1)^3 \geq 2k^3(2k^2+4k+2+3k+3+4)$$
$$2(2k^2+3k+4)(k^3+3k^2+3k+1) \geq 4k^5+14k^4+18k^3)$$
$$4k^5+18k^4+38k^3+46k^2+30k+8 \geq 4k^5+14k^4+18k^3$$
$$4k^4+20k^3+46k^2+30k+8 \geq 0$$

což je samozřejmě pravdivá nerovnost pro libovolné k přirozené. □

Úloha I.90. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{2^k}$. [Konverguje absolutně pro $x \in [-1,1]$, pro ostatní x nekonverguje.]

Návod. Pro $x = 0$ je konvergence jasná. Nechť nyní $x > 0$. Platí, že

$$\frac{x^{k^2}}{2^k} = \frac{2^{\log_2 x \cdot k^2}}{2^k} = 2^{k^2 \log_2 x - k} = 2^{k^2(\log_2 x - 1/k)},$$

z čehož plyne, že pro $x \le 1$ je člen $\log_2 x - 1/k$ záporné číslo a řada tudíž konverguje (absolutně). Pro $x > 1$ je ale od jistého k počínaje kladná a dokonce je

$$2^{k^2(\log_2 x - 1/k)} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \neq 0.$$

Pro $x > 1$ tedy řada nekonverguje.

Pokud $x < 0$, pak substituujme $y = -x$. Užitím faktu, že $(-1)^{k^2} = (-1)^k$, tak dostaneme řadu $\sum (-1)^k \frac{y^{k^2}}{2^k}$. Podle předchozí diskuze je jasné, že pro $y \le 1$ konverguje absolutně a pro $y > 1$ konvergovat nemůže.

Závěr: řada konverguje absolutně pro $x \in [-1,1]$, pro ostatní x nekonverguje. □

Úloha I.91. $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$. [Konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$, pro ostatní x nekonverguje.]

Návod. Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4 / |x|^{k+1}}{k^4 / |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} < 1.$$

Pokud $|x| \ge 1$, nekonverguje, neboť $\lim k^4 |x|^k = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim k^4 x^k = 0$. □

Úloha I.92. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. [Konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$, neabsolutně ještě pro $x = 1$, pro ostatní x nekonverguje.]

Návod. Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle odhadu

$$\left| (-1)^k \frac{x^k}{k} \right| \le |x|^k.$$

Pro $x = 1$ konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria, protože $\frac{1}{k} \searrow 0$. Absolutně nekonverguje, neboť řada $\frac{1}{k}$ není konvergentní.

Pro $x = -1$ řada nekonverguje, neboť $(-1)^{k+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\frac{1}{k}$.
Pokud $|x| > 1$, řada nekonverguje, neboť $\lim |a_k| = +\infty$. □

Úloha I.93. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$. [Konverguje absolutně pro $x \in [-1,1]$, pro ostatní x nekonverguje.]

Návod. Pro $|x| \le 1$ konverguje absolutně podle odhadu $\frac{|x|^k}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$. Pro $|x| > 1$ nekonverguje, neboť $\lim |a_k| = +\infty$. □

Úloha I.94. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$. [Konverguje absolutně pro $x \in (-1,1)$, neabsolutně ještě pro $x = \pm 1$, pro ostatní x nekonverguje.]

Návod. Pro $|x| < 1$ je řada konvergentní absolutně podle srovnávacího kritéria a odhadu

$$\left| (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \le |x|^{2k+1}.$$

Pro $x = 1$ je řada konvergentní neabsolutně podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{2k+1} \searrow 0$.

Pro $x = -1$ je $(-1)^k (-1)^{2k+1} \frac{1}{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ a řada konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.
Pro $|x| > 1$ řada nekonverguje, neboť $\lim |a_k| = +\infty$. □

Úloha I.95. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^2 \pi) \left(\sqrt{k+9} - \sqrt{k} \right)$. [Konverguje neabsolutně.]

Návod. Platí, že k^2 je liché, právě když k je liché. Proto

$$\cos(k^2\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Dále je

$$\sqrt{k+9} - \sqrt{k} = \frac{9}{\sqrt{k+9}+\sqrt{k}} \geq \frac{9}{\sqrt{k}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\frac{9}{\sqrt{k}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria. □

Úloha I.96. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{k^2+1})$. [Konverguje neabsolutně.]

Návod. Platí, že

$$\sin(\pi\sqrt{k^2+1}) = \sin(\pi\sqrt{k^2+1} - k\pi + k\pi) =$$

$$= \sin(\pi\sqrt{k^2+1} - k\pi)\cos(k\pi) - \cos(\pi\sqrt{k^2+1} - k\pi)\sin(k\pi) = (-1)^k \sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}.$$

Neabsolutní konvergence podle Leibnizova kritéria je nyní zřejmá. Jak je to ale s tou absolutní? Platí, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}} \cdot \frac{\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{1}{2k}} = 1.$$

Protože řada $\frac{1}{2k}$ diverguje, podle limitní verze srovnávacího kritéria musí divergovat také řada původní. Absolutní konvergence je tak vyloučena. □

Úloha I.97. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} - 1\right)$. [Konverguje absolutně.]

Návod. Neabsolutní konvergence je zřejmá z faktu, že

$$\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} = \sqrt[k]{1 - \frac{1}{k^2+1}} \nearrow 1,$$

nicméně její vyšetřování je de facto zbytečné. Co se týče absolutní konvergence, všimněte si nejprve, že

$$\left|(-1)^k\left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} - 1\right)\right| = 1 - \sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}.$$

Pro důkaz by se mělo hodit použít srovnávací limitní kritérium a spočítat třeba limitu (což vyžaduje trik s pomocí exponenciály)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 - \sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}}{\frac{1}{k^3}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1 - \exp\left[\frac{1}{k}\ln\frac{k^2}{k^2+1}\right]}{\frac{1}{k^3}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - \exp\left[\frac{1}{k}\ln\frac{k^2}{k^2+1}\right]}{\frac{1}{k}\ln\frac{k^2}{k^2+1}} \frac{\ln\frac{k^2}{k^2+1}}{\frac{1}{k^2}} =$$

Substituce $y = \frac{1}{k}\ln\frac{k^2}{k^2+1}$:

$$= \lim_{y\to 0-} \frac{1-e^y}{y} \cdot \lim_{k\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2+1}\right)^{k^2} = -1 \cdot \ln(1/e) = 1.$$

Koeficienty řady lze tedy srovnat s $\frac{1}{k^3}$ a proto je řada absolutně konvergentní. □

Úloha I.98. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$. [Konverguje neabsolutně.]

Návod. Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2k-1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně.

Leibnizovo kritérium lze použít přímo, protože nerovnosti

$$2k+1 \leq 2(k+1)-1, \quad 2k-1 \leq 2(k+1)+1 \implies \frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2(k+1)+(-1)^{k+1}}$$

jsou pravdivé. □

Úloha I.99. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$. [Konverguje neabsolutně.]

Návod. Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{k+(-1)^k} \geq \frac{1}{k-1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně.

Leibnizovo kritérium nelze použít přímo, konvergence není monotónní (ale schodovitá). Můžeme ale použít Leibnizovo kritérium zvlášť na řady $\sum a_{3k-2}$, $\sum a_{3k-1}$ a $\sum a_{3k}$ (jako kdybychom sčítali řadu, kterou tvoří každý třetí člen z původní řady (respektive posunuté pořadí o jedno či dvě místa)). To lze, protože

$$\frac{1}{3k+(-1)^{3k}} \geq \frac{1}{3k+1} \geq \frac{1}{3k+2} = \frac{1}{3(k+1)-1} \geq \frac{1}{3(k+1)+(-1)^{3(k+1)}},$$

apod. pro další dvě řady (konvergence koeficientů už je monotónní). Z konvergence těchto tří řad pak plyne konvergence naší řady — součet konvergentních řad je samozřejmě konvergentní řada. □

Úloha I.100. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$. [Diverguje.]

Návod. Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k} \geq \frac{1}{\sqrt{k}-1}$. Ukážeme, že řada nekonverguje vůbec! Označme a_k její k-tý člen. Kdyby byla tato řada $\sum a_k$, pak by musela být i řada $\sum(a_{2k}+a_{2k-1})$ (její částečné součty tvoří podposloupnost částečných součtů původní řady).

Nechť tedy k je sudé číslo. Pak platí (pro $k > 100$), že

$$\frac{1}{\sqrt{k}+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}-1} = \frac{\sqrt{k+1}-1-\sqrt{k}-1}{(\sqrt{k}+1)(\sqrt{k+1}-1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}-2}{k(1+1/\sqrt{k})(\sqrt{1+1/k}-1/\sqrt{k})} \leq \frac{-2}{k\cdot 1\cdot(1-0,1)} = \frac{-2}{0,9}\frac{1}{k}$$

přičemž poslední řada diverguje do $-\infty$. □

Úloha I.101. $\sum_{k=2}^{\infty} \cos(k\pi)\frac{2-\cos(k\pi)}{4k}$. [Diverguje.]

Návod. Uvažte, že $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{2-\cos(k\pi)}{4k} \geq \frac{1}{4k}$. Ukážeme, že řada nekonverguje vůbec. Označme a_k její k-tý člen. Kdyby konvergovala $\sum a_k$, pak by musela konvergovat též $\sum(a_{2k}+a_{2k+1})$ (její částečné součty tvoří podposloupnost částečných součtů původní řady).

Spočtěme

$$a_{2k}+a_{2k+1} = \frac{3}{8k} - \frac{1}{8k+4} = \frac{24k+12-8k}{8k(8k+4)} = \frac{16k+12}{8k(8k+4)} = \frac{16+12/k}{32\cdot 2k+32} \geq \frac{16}{32\cdot 2k+32}.$$

Tato řada ale zjevně diverguje. □

Poznámka: Tento test (konvergence řady $\sum(a_{2k}+a_{2k+1})$) je možné udělat vždy – u neabsolutní konvergence to může být kontrola, že jsme se nespletli. Například v příkladu 13:

$$\sum(a_{2k}+a_{2k+1}) = \sum\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+1-1}\right) = \sum\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum \frac{-1}{2k(2k+1)}$$

a tato řada je konvergentní (test prošel). O samotné konvergenci původní řady to ale v tomto případě nic jiného, než že to je možné, nepoví![19]

[19]) Protipříkladem je třeba řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

1.5.2 Abelovo a Dirichletovo kritérium

1.6 Další kritéria konvergence řad

1.6.1 Zobecněné podílové a odmocninové kritérium

1.6.2 Raabeovo a Gaussovo kritérium

1.6.3 Využití Taylorových polynomů při vyšetřování konvergence řad

Úloha I.102. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k^2} z^k}{(k+1)^{k^2}}$.

Návod. Použijeme odmocninové kritérium.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^{k^2}|z|^k}{(k+1)^{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} |z| \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{|z|}{e}.$$

Řada tedy konverguje, pokud $|z| < e$ a diverguje, pokud $|z| > e$. Pokud $|z| = e$, potom řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k^2} e^k}{(k+1)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k^2} e^k = \lim_{k\to\infty} \exp\left[k + k^2 \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right] =$$

Použitím Taylorova rozvoje a věty o limitě složené funkce

$$= \lim_{k\to\infty} \exp\left[k + k^2\left(-\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2} + o(k^{-2})\right)\right] = \lim_{k\to\infty} \exp\left[k - \frac{k^2}{k+1} - \frac{k^2}{2(k+1)^2} + k^2 o(k^{-2})\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \exp\left[\frac{k(k+1) - k^2}{k+1} - \frac{k^2}{2(k+1)^2} + k^2 o(k^{-2})\right] = \lim_{k\to\infty} \exp\left[\frac{k}{k+1} - \frac{k^2}{2(k+1)^2} + k^2 o(k^{-2})\right] =$$

$$= \exp\left[1 - \frac{1}{2} + 0\right] = e^{1/2} \neq 0.$$

□