Kapitola 3

Mocninné řady

3.1 Konvergence

Určete poloměr konvergence a vyšetřete konvergenci na kružnici konvergence.

Příklad 3.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

Návod: Je

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = \lim \frac{\ln n}{\ln n + \ln(1 + 1/n)} \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

Na kružnici konvergence je $x = e^{i\alpha}$. Pokud $\alpha = 0$, tj. $x = 1$, řada diverguje srovnáním s harmonickou řadou, neboť $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$. Pro $\alpha \in (0, 2\pi)$ řada konverguje neabsolutně, neboť lze psát

$$\sum \frac{e^{in\alpha}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}},$$

řada $\sum \frac{e^{in\alpha}}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria a posloupnost $(\ln n)/\sqrt{n}$ je omezená (konverguje k nule) a od jistého členu počínaje monotónní, jak plyne z výpočtu derivace funkce $\ln x/\sqrt{x}$:

$$\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} < 0$$

pro dostatečně velká x.

Příklad 3.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

Návod: Je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n!)}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Tudíž poloměr konvergence je 4.

Na hraniční kružnici je $x = 4e^{i\alpha}$ pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Vyšetřujeme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \, e^{in\alpha}.$$

Podle Stirlingovy formule je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Proto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot 2\pi n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{4\pi n}} 4^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\pi n} \neq 0,$$

a tudíž řada musí divergovat, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Příklad 3.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$.

Návod: Je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{n5^n} = 5.$$

Na kružnici konvergence je $x - 3 = 5e^{i\alpha}$. Pro $\alpha = 0$ je

$$\sum \frac{(x-3)^n}{n5^n} = \sum \frac{1}{n} = +\infty.$$

Pro $\alpha \neq 0$ je

$$\sum \frac{(x-3)^n}{n5^n} = \sum \frac{e^{in\alpha}}{n},$$

řada konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria.

Příklad 3.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n$, *kde* $(0 < \alpha < 1)$.

Návod: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|} = \limsup_{n\to\infty} \alpha^n = 0,$$

a tedy $R = +\infty$.

Příklad 3.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n}\right) \cdot x^n$, *kde* $a > 0$, $b > 0$.

Návod: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n}\right|} =$$

$$= \max\{|a|, |b|\} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n} \frac{1}{\max\{|a|^n, |b|^n\}} + \frac{b^n}{n} \frac{1}{\max\{|a|^n, |b|^n\}}\right|} = \max\{|a|, |b|\},$$

podle věty o sevření, neboť,

$$\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}+\frac{b^n}{n}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}\geq\frac{1}{n},$$

neboť v jednom zlomku se maximum ve jmenovateli a čitatel zkrátí. Naopak

$$\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}+\frac{b^n}{n^2}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n}.$$

Proto

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}+\frac{b^n}{n}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}}\leq\sqrt[n]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}\to 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}+\frac{b^n}{n}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\to 1.$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{1}{R}=\max\{a,b\}\implies R=\min\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}.$$

Konvergence na hraniční kružnici: řada na hraniční kružnici v bodech $x=\frac{1}{a}e^{i\alpha}$ konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, pokud $\alpha\in(0,2\pi)$. Pokud $\alpha=0$, pak řada diverguje (neboť jedna její část je harmonická).

Příklad 3.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot(x-1)^n.$

Návod: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}=\limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$$

a tedy $R=\frac{1}{e}$. Na hraniční kružnici je $x=1+\frac{1}{e}e^{i\alpha}$, kde $\alpha\in[0,2\pi)$, vyšetřujeme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}\cdot e^{in\alpha}$$

Platí ale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

tudíž řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence $a_n\to 0$. Limitu lze spočítat například takto pomocí Taylorova rozvoje (s využitím spojitosti exponenciální funkce):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})\right)-x\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2}+o(1)\right]=e^{-1/2+0}=e^{-1/2}.$$

Příklad 3.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n.$

Návod: Je

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left(\frac{\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}}{\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}} \right)^p = \lim \left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{2(n+1)^2} \right)^p = 2^p.$$

Na konvergenční kružnici je $x^n = 2^p e^{i\alpha}$. Pro $\alpha = \pi$ máme

$$\sum (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p x^n = \sum \left(\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p$$

Použitím Raabeova kritéria máme, že

$$\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{p}{2} \qquad \text{(užijte Taylorův rozvoj)},$$

a tedy řada pro $p > 2$ konverguje a pro $p < 2$ diverguje. (Gaussovo kritérium by ukázalo, že pro $p = 2$ řada diverguje.) Pro $\alpha \neq \pi$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ řada konverguje pro $p > 0$, pro $0 < p \leq 2$ pouze neabsolutně podle Dirichletova kritéria (detaily, obdobné předchozímu výpočtu, ponecháváme na rozmyšlení čtenáři).

3.2 Rozviňte v mocninné řady

Příklad 3.8 $f(x) = \sin^2 x$.

Návod: Je

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}.$$

Příslušná mocninná řada má tedy koeficienty

$$a_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \qquad a_{2k} = \frac{1}{2} \frac{2^{2k}}{(2k)!}, \qquad a_{2k+1} = 0.$$

Příklad 3.9 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

Návod: Podle Taylora je

$$\sqrt{1 + x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^{2k}, \qquad \text{kde} \qquad \binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!}.$$

Příslušná mocninná řada má tedy koeficienty

$$a_{2k} = \binom{1/2}{k}, \qquad a_{2k+1} = 0.$$

Příklad 3.10 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \, \mathrm{d}t$.

Návod: Podle Taylora je

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$$

a integrací člen po členu máme

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1}.$$

Příklad 3.11 $f(x) = \sinh x$.

Návod: Je

$$\sinh x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \sum \frac{1}{2}\frac{x^k}{k!} - \sum \frac{1}{2}\frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

Zřejmě tedy

$$a_{2k+1} = 0, \qquad a_{2k} = \frac{1}{(2k)!}.$$

3.3 Sečtěte řady

Příklad 3.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

Návod: Je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \left(\sum n x^n\right)' = \left(x\sum n x^{n-1}\right)' = \left(x\left(\sum x^n\right)'\right)' =$$

$$= \left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Příklad 3.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

Návod: Buď

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

Potom

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4}.$$

Odtud

$$f(x) = \int \frac{x^4}{1-x^4}\,\mathrm{d}x = \int\left(-1 + \frac{1}{1-x^4}\right)dx = \int\left(-1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\right)dx \overset{C}{=} -x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

Integrační konstanta je z podmínky $f(0) = 0$ zřejmě nulová.

Příklad 3.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$.

Návod: Pomocí Taylorova rozvoje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = (1-x)^{-1/2}.$$

Jiný návod: Označ (pozor na sčítací index)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

Lze dokázat, že

$$(1-x)f'(x) = f(x).$$

Řešením této diferenciální rovnice je, vzhledem k $f(0) = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1.$$

Příklad 3.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

Návod: Je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \left(\sum nx^{n+1}\right)' = \left(x^2 \sum nx^{n-1}\right)' = \left(x^2 \left(\sum x^n\right)'\right)' =$$

$$= \left(x^2 \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

3.4 Sečtěte číselné řady

Příklad 3.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Návod: Označme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n.$$

Potom

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2},$$

a tudíž

$$f(x) = -\ln|1 - x/2|.$$

Je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = f(1) = \ln 2.$$

Příklad 3.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Návod: Označme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}.$$

Je

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n.$$

Je

$$G(x) = \int_0^x \frac{F(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1.$$

Odtud

$$\frac{F(x)}{x} = G'(x) = e^x,$$

a tedy

$$f(x) = F'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x.$$

Je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = f(1) = 2e.$$

Příklad 3.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Návod: Označme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Potom

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)',$$

tudíž

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = f(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 3.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Návod: Označme
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^{n+1}.$$
Pak
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x).$$
A tedy
$$f(x) = \int -\ln(1+x)\,\mathrm{d}x = C_1 - (1+x)\ln(1+x) + x.$$
Je $f(0) = 0$, tedy $C_2 = 0$. Odtud $f(1) = 1 - 2\ln 2$.

3.5 Diferenciální rovnice

Hledejte řešení ve tvaru mocninné řady.

Příklad 3.20 $y'' - xy = 0$, *p.p.* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Návod: Buď $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pak
$$y'' - xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$
Odtud vyplývá, že
$$\begin{aligned} 2(2-1)a_2 &= 0 \\ 3(3-1)a_3 + a_0 &= 0 \\ 4(4-1)a_4 + a_1 &= 0 \\ 5(5-1)a_5 + a_2 &= 0 \\ 6(6-1)a_6 + a_3 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$
Odkud máme, že $a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = 0$. Z počáteční podmínky $y'(0) = 0$ vyplývá, že $a_1 = 0$, a tedy také $a_4 = a_7 = \ldots = 0$. Konečně z počáteční podmínky $y(0) = 1$ vyplývá, že $a_0 = 1$, a tedy
$$a_{3k} = \frac{-1}{(3k)(3k-1)} a_{3(k-1)}.$$
Sami rozmyslete vztah pro a_{3k} a ukažte, že řada konverguje.