# KUCHAŘKA NA ŘEŠENÍ ODR

Na základě poznámek ze cvičení zpracoval
**Vojtěch Krejčiřík**
korektury **Petra Suková**

Na začátek několik věcí, na které v žádném případě nezapomenout. Řešením ODR je funkce ji splňující a interval, na kterém platí, proto vždy uvést INTERVAL, a to maximimální možný. Pokud je zadána počáteční podmínka, musí ležet v intervalu. Při integrování také nezapomínejte na integrační KONSTANTU!
Formální zápis derivace: $y' = \frac{dy}{dx}$.

## I. Separace proměnných

*Předpis*

$$y' = g(y)\,h(x).$$

Pokud $g(C_0) = 0$ kde $h(x)$ má smysl, existuje řešení

$$y = C_0.$$

Mám ošetřeno a můžu dělit

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)\,dx,$$

Přímou integrací dostanu řešení. Pozor na možné napojení na konstantní řešení. Aby bylo možné, je třeba aby v bodě $x_0$, kde k napojení dojde, platilo:

$$f(x_0) = C_0\,,\ f'(x_0) = 0.$$

*Příklad*:

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

Zřejmě $D(f) = (0, \infty)$. Funkce $y = 0$ je řešením rovnice.
Separuji proměnné a zintegruji

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + C.$$

Vyjádřím $y$, pozor, umocněním přidám jedno řešení.

$$y = (\sqrt{x} + C)^2.$$

Následuje diskuze vzhledem ke konstantě $C$.

1. $C > 0$ : Nelze napojit, funkce má na tvar

$$y = (\sqrt{x} + C)^2 \quad , \quad D(f) = (0, \infty).$$

2. $C < 0$ : Lze napojit na konstantní řešení. Ovšem nelze použít $y = (\sqrt{x} + C_1)^2$ na $(0, C_1^2)$ , protože $y' < 0$, nesouhlasí se zadáním, je to řešení přidané umocněním.

Řešení tedy zapíšeme takto :
a) $y = 0$ na $D(f)$ .
b) $y = (\sqrt{x} + C_1)^2$ na $D(f)$, kde $C_1 \in \Re$.
c) $y = 0$ na $(0, C_2^2)$ , $y = (\sqrt{x} + C_2)^2$ na $(C_2^2, \infty)$, kde $C_2 < 0$.

## II. Rovnice homogenní a ty, které na ně lze převést

*Předpis*

$$y' = f(y, x).$$

**a)** Pokud pro funkci $f(y, x)$ platí : $f(ty, tx) = f(y, x)$, to znamená, že $y$ a $x$ vystupují přímo v podílu, lze zavést substituci

$$y = z(x)\, x,$$

$$y' = z'(x)\, x + z(x),$$

kterou rovnici převedu do tvaru separovaných proměnných.

*Příklad*:

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}.$$

$D(f) = \Re \setminus \{0\}$ , nulové řešení neexistuje, zavedu výše uvedenou substituci

$$z'\, x + z = z - e^z,$$

$z$ se odečtou a zůstane rovnice ve tvaru separovaných proměnných, kterou už umím řešit.

$$\int \frac{dz}{e^z} = -\int \frac{dx}{x}.$$

$$-e^{-z} = -\ln|x| + C.$$

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C.$$

$$y = -x\, \ln(C + \ln|x|).$$

**b)** Funkce na pravé straně je ve tvaru

$$f(y, x) = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}.$$

Vyřeším soustavu rovnic (místo $x, y$ neznámé $m, n$) a zavedu substituci

$$u = x - m\,,\ du = dx\,,\ v = y - n\,,\ dv = dy.$$

Rovnici dostanu do tvaru

$$v' = \frac{u - v}{u + v},$$

který řeším jako v bodu a).

Pokud soustava nemá řešení (koeficienty lineárně závislé $a_1 + b_1 = k(a_2 + b_2)$ ), zavedu substituci například

$$z = a_1 x + b_1 y,$$

$$y' = \frac{z' - a_1}{b_1}.$$

A rovnici opět dostanu do tvaru separovaných proměnných.

<u>*Příklad*</u>:

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Vyřeším soustavu $m - n + 1 = 0$, $m + n - 3 = 0$. Dostanu $m = 1$, $n = 2$. Substituce je

$$u = x - 1\,,\ v = y - 2,$$

Rovnice je ve tvaru

$$v' = \frac{u - v}{u + v}.$$

Další substituce

$$v = w(u)\,u\,,\ v' = w'u + w.$$

$$w'\,u + w = \frac{u\,(1 - w)}{u\,(1 + w)}.$$

Zkrátím $u$, odečtu $w$ a tím rovnici dostanu do tvaru separovaných proměnných, kterou již vyřeším podle I.

## III. Lineární rovnice 1. řádu

*Předpis*:

$$y' + f(x)\,y = g(x).$$

**a)** Celou rovnici vynásobím faktorem $e^{\int f(x)dx}$

$$y' + f(x)\,y = g(x) / .e^{\int f(x)dx}.$$

$$y'\,e^{\int f(x)dx} + f(x)\,y\,e^{\int f(x)dx} = g(x)\,e^{\int f(x)dx}.$$

Všimněme si, že platí

$$\left(y\,e^{\int f(x)dx}\right)' = y'\,e^{\int f(x)dx} + f(x)\,y\,e^{\int f(x)dx},$$

což je přesně výraz na levé straně. Zintegrujeme tedy

$$y\, e^{\int f(x) dx} = \int g(x)\, e^{\int f(x) dx} + C,$$

a po vydělení dostaneme příslušné řešení funkce $y$.

*Příklad*:

$$y' - 2\frac{y}{x} = x^3.$$

$D(f) = \Re \setminus \{0\}$. Násobím $e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$ a dostanu

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = x.$$

$$y = \frac{1}{2}x^4 + C\, x^2.$$

**b)** Nejprve vyřeším homogenní rovnici (bez pravé strany), ta je řešitelná separací proměnných.

$$y = C\, e^{-\int f(x) dx}.$$

Abych dostal obecné řešení musím k funkci řešící homogenní rovnici přičíst jeden libovolný partikulární integrál (který řeší původní rovnici), ten hledám ve tvaru

$$y_p(x) = K(x)\, e^{-\int f(x) dx}.$$

*Příklad*:

$$y' - 2\frac{y}{x} = x^3.$$

Najdu řešení homogenní rovnice

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0.$$

$$y = C\, x^2.$$

Partikulární řešení hledám ve tvaru $y_p = K(x)\, e^{-\int -\frac{2}{x}} = K(x)\, x^2$,

$$K(x)'\, x^2 + 2\, K(x)\, x - 2\, K(x)\, x = x^3.$$

$$K(x)' = x.$$

$$K(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1.$$

Tedy

$$y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) x^2,$$

toto přičtu k řešení homogenní rovnice

$$y = C\, x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) x^2,$$

po úpravě dostanu

$$y = C_2\, x^2 + \frac{1}{2} x^4,$$

což je překvapivě stejně jako při použití postupu a).

## IV. Bernoulliova rovnice

*předpis*:

$$y' + f(x)\, y = g(x)\, y^\alpha \quad \alpha \in \Re \setminus \{0;1\}.$$

Pokud $\alpha > 0$, je řešním $y = 0$.
Nejprve celou rovnici vynásobím $/.y^{-\alpha}$

$$y'\, y^{-\alpha} + f(x)\, y^{1-\alpha} = g(x).$$

Zavedu substituci

$$z = y^{1-\alpha},$$

$$z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}\, y'.$$

Vidím, že původní rovnici dostanu ve tvaru

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)\, z = g(x).$$

Toto je lineární rovnice 1. řádu a tu řeším jako v bodu III.

*příklad*

$$y' - 2\, x\, y = 2\, y^2$$

Nejdříve si všimneme, že $y = 0$ splňuje rovnici a je také řešením na $\Re$. Zavedu substituci

$$z = \frac{1}{y},$$

$$y' = -\frac{1}{z^2}\, z'.$$

Dostanu rovnici

$$-\frac{1}{z^2}\, z' - \frac{2\, x}{z} = \frac{2\, x^3}{z^2},$$

kterou upravím na tvar lineární rovnice 1.řádu

$$z' + 2\, x\, z = -2\, x^3.$$

Vynásobím $/.e^{\int 2\, x} = e^{x^2}$ a upravím na tvar

$$\left(z\, e^{x^2}\right)' = -2\, x^3\, e^{x^2}.$$

Po integraci pravé strany metodou per partes dostanu

$$z\, e^{x^2} = e^{x^2}\left(1 - x^2\right),$$

$$z = 1 - x^2 + C = C - x^2.$$

Vrátím se k původní substituci

$$y = \frac{1}{C - x^2}.$$

Na konstantní řešení nelze nikde napojit. Definiční obor $D(f) = \Re \setminus \{\pm\sqrt{C}\}$

## V. Lineární rovnice s konstantními koeficienty

*předpis*:

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} \, + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f(x).$$

Nejprve vyřeším homogenní rovnici (bez pravé strany), a získám tak fundamentální systém rovnice $FS = \{y_1, \ldots, y_n\}$ (řešení je $y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$). Ten má tolik prvků, jaký je nejvyšší stupeň derivace vyskytující se v rovnici (mj. tvoří vektorový prostor dimenze n :). Obecné řešení získám tak, že přičtu libovolné partikulární řešení.

- **řešení homogenní rovnice, nalezení fundamentálního systému**

  Hledám řešení ve tvaru $e^{\lambda x}$

  $$a_n\, \lambda^n\, e^{\lambda x} + a_{n-1}\, \lambda^{n-1}\, e^{\lambda x} + \cdots + a_0\, e^{\lambda x} = 0.$$

  Po vydělení $e^{\lambda x}$ dostnu charakteristickou rovnici (CE)

  $$a_n\, \lambda^n + a_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

  Jejím řešením dostanu prvky fundamentálního systému. Může nastat několik možností řešení charakteristické rovnice:

  1. Všechny kořeny jsou reálné a různé.
     Fundamentální systém je

     $$FS = \{e^{\lambda_1} x\,,\, e^{\lambda_2} x\,,\, \ldots\,,\, e^{\lambda_n} x\}.$$

  2. Některé kořeny jsou komplexní.
     Protože koeficienty $a_1 \ldots a_n$ jsou reálné, a tedy komplexní řešení jsou komplexně sdružená

     $$\lambda_i = a + bi\,,\, \lambda_j = a - bi,$$

     lze příslušné prvky fundamentálního systému zapsat jako

     $$FS = \{\ldots, e^{ax} \sin bx\,,\, e^{ax} \cos bx\, \ldots\}.$$

  3. Některé kořeny jsou násobné.
     Pokud kořen $\lambda_i$ je násobnosti $\nu$, jsou příslušné prvky fundamentálního systému

     $$FS = \{\ldots,\, e^{\lambda_i}\,,\, x e^{\lambda_i}\,, \ldots,\, x^{\nu-1} e^{\lambda_i}\,, \ldots\}.$$

*příklad*

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y^{(1)} + y = 0.$$

Vyřeším charakteristickou rovnici

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

$$\left(\lambda^2 + 1\right)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Dostal jsem 2 řešení komplexně sdružená ($i$, $-i$) a jedno násobnosti 2 (1). Fundamentální systém, který musí mít 4 prvky, je

$$FS = \{\sin x\,,\, \cos x\,,\, e^x\,,\, x\,e^x\}.$$

Pravá strana je rovna nule a tak dostanu obecné řešení

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3\, e^x + C_4\, x\, e^x.$$

$D(f) = \Re$

Jistě jste si na začátku všimli, že rovnici vyhovuje i konstantní řešení $y = 0$. Toho je však možné docílit i vhodnou volbou konstant v obecném řešení.

- **Řešení rovnice s pravou stranou, nalezení partikulárního řešení**

  - **Pravá strana je ve tvaru**

    $$f(x) = P(x)\, e^{\mu\, x},$$

    kde P(x) je polynom stupně $n$. Může nastat několik možností.

    1. $\mu \in \Re$ a není kořenem CE.
       Partikulární řešení hledám ve tvaru

       $$y_p = Q(x)\, e^{\mu x}.$$

       Kde $Q(x)$ je polynom stejného stupně jako $P(x)$.

       *příklad*

       $$y'' - 4\,y' + 4\,y = x\,e^{3x}$$

       Fundamentální systém je $FS = \{e^{2x}\,,\, x\,e^{2x}\}$. 3 není kořenem CE, proto hledám partikulární řešení ve tvaru $y_p = A\,x\,e^{3x} + B\,e^{3x}$. To nasadím do původní rovnice, abych našel koeficienty $A$, $B$.

       $$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} + 9Be^{3x} - 4\left(Ae^{3x} + 3Axe^{3x} + 3Be^{3x}\right)$$

       $$+4\left(Axe^{3x} + Be^{3x}\right) = x\,e^{3x}$$

       Jejím vyřešením získám hodnoty $A = 1$ a $B = 2$. Obecné řešení tedy je

       $$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + xe^{3x} + 2e^{3x}$$

2. $\mu \in \Re$ a je kořenem CE násobnosti $\nu$.
   Partikulární řešení hledám ve tvaru

$$y_p = x^\nu \, Q(x) \, e^{\mu x}.$$

   Kde $Q(x)$ je polynom stejného stupně jako $P(x)$.
3. $\mu \notin \Re$.
   Sem patří i funkce sin a cos, pokud exponent rozepíšeme jako $\mu x = (\mu_1 + \mu_2 i) \, x$ (goniometrické funkce mají ve svém argumentu pouze imaginární část exponentu). Pokud chci reálné řešení, hledám ve tvaru

$$y_p = Q(x)_1 \, e^{\mu_1 x} \sin \mu_2 x + Q(x)_2 \, e^{\mu_1 x} \cos \mu_2 x.$$

   Kde $Q(x)_1$ , $Q(x)_2$ jsou polynomy stejného stupně jako $P(x)$. Pozor, je třeba hledat řešení s oběma goniometrickými funkcemi.

   *příklad*

$$y'' + y' - 2y = 4e^{3x} \cos x$$

   Fundamentální systém je $FS = \{e^x \, , \, e^{-2x}\}$. Partikulární řešení budu hledat ve tvaru

$$y_p = Ae^{3x} \sin x + Be^{3x} \cos x.$$

   Pozor, exponent na pravé straně je $\mu = 3 + i$, nikoli 1, proto postupuji podle bodu 1), tj. nehledám s mocninou $x^\nu$. Po nasazení do rovnice a vyřešení dostanu koeficienty $A$ , $B$.
   $A = 14/109$ , $B = 26/109$.
   Obecné řešení je

$$y = C_1 \, e^x + C_2 \, e^{-2x} + \frac{14}{109} e^{3x} \sin x + \frac{26}{109} e^{3x} \cos x.$$

Poznámka : Pokud je na pravé straně součet funkcí, hledám $y_p$ také jako součet jednotlivých příslušných $y_p$

– **Variace konstant**.

Mám fundamentální systém $FS = \{y_1 \, , \, y_2 \, , \ldots , \, y_n\}$, partikulární řešením hledám ve tvaru

$$y_p = \Sigma_{i=1}^n C_i(x) \, y_i(x).$$

Hledám ke každému prvku $FS$ příslušnou "konstantu", jenom ta "konstanta" je funkcí $x$.

Po nasazení do rovnice se mi spoustu členů odečte, protože $y_i$ řeší homogenní rovnici. Dále si budu moct některé parametry zvolit rovny 0. Až mi nakonec vypadne soustava rovnic, jejíž neznámými budou hodnoty $C_i'$ a jejíž matice bude Wronskián a vektor řešení bude jako poslední člen mít pravou stranu původní rovnice $f(x)$ (viz chytřejší knihy :). Nakonec bude jen stačit zintegrovat $C_i'$.

*příklad*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

$FS = \{e^x\,,\ xe^x\}$. Požiji variaci konstant, hledám ve tvaru

$$y_p = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,x\,e^x.$$

Spočítám první a druhou derivaci

$$y_p' = C_1'\,e^x + C_1\ (e^x)' + C_2'\,x\,e^x + C_2\ (x\,e^x)'$$

Položím si první podmínku, určující řešení

$$C_1'\,e^x + C_2'\,x\,e^x = 0.$$

Znalejší v tom již vidí první řádek Wronskiánu. To mi také zjednoduší výpočet druhé derivace

$$y_p'' = C_1'\ (e^x)' + C_1\ (e^x)'' + C_2'\ (x\,e^x)' + C_2\ (x\,e^x)''\,.$$

Toto dosadím do původní rovnice a dostanu driuhou rovnici příslušné soustavy

$$C_1'\ (e^x)' + C_1\ (e^x)'' + C_2'\ (x\,e^x)' + C_2\ (x\,e^x)''$$

$$+2C_1\ (e^x)' + 2C_2\ (x\,e^x)' + C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,x\,e^x = \frac{e^x}{x}.$$

Členy s nederivovanými $C_i$ se sečtou na nulu, protože příslušné funkce $y_i$ řeší homogenní rovnici. Tudíž dostanu druhou rovnici soustavy

$$C_1'\ (e^x)' + C_2'\ (x\,e^x)' = \frac{e^x}{x}.$$

Tuto soustavu lineárních rovnic vyřeším a dostanu

$$C_1' = 1\,,\ C_2' = \frac{1}{x}.$$

Zintegrováním dostanu příslušné hodnoty "konstant"

$$C_1 = x + K_1\,,\ C2 = \ln x + K_2$$

Konstanty zde nemají význam, přičtou se s předchozími. Rovnou napíšu obecné řešení

$$y = C_1\,e^x + C_2\,x\,e^x + x\,e^x + x\,\ln x\,e^x.$$

## VI. Jiné typy rovnic 2. řádu

*předpis*:

$$y'' = f\,(x\,,\,y\,,\,y')$$

Toto je nejobecnější zápis. Mohou nastat situace, které jsou jednoduchou úpravou převoditelné na rovnice, jež řešit umím.

- $y'' = f\,(y\,,\,y')$ (chybí $x$)

  Zavedu substituci

  $$y'(x) = g(y),$$

  a tedy $y'' = g'(y)$. Převedu tak na rovnici prvního řádu, kde mám funkci $g$ od neznámé $y$.

  *příklad*

  $$y'' = \frac{y'^2}{y^2}.$$

  Zavedu výše uvedenou substituci a dostanu rovnici

  $$g' = \frac{g^2}{y^2}.$$

  Ta je jednoduše řešitelná separací proměnných, po úpravě dostanu

  $$g = \frac{y}{1 + yC_1}.$$

  Vrátím se do původní substituce

  $$y' = \frac{y}{1 + yC_1}.$$

  Ta je opět řešitelná separací proměnných. Dostanu výsledek

  $$\ln y + C_1 y = x + C_2.$$

- $y'' = f\,(x\,,\,y')$

  Zavedu substituci

  $$y'(x) = h(x),$$

  a tedy $y'' = h'(x)$. Převedu tak na rovnici prvního řádu.

- $y'' = f\,(x\,,\,y)$

  Nemá obecný způsob řešení

- $y'' = f\,(y')$

  Substituce

  $$y'(x) = h(x).$$

  a tedy $y'' = h'(x)$. Převedu tak na rovnici prvního řádu.

- $y'' = f\,(y)$
  Celou rovnici vynásobím / $.2y'$ a dostanu

$$2\,y'\,y'' = 2\,y'\,f(y)$$

Všimněme si, že $\left((y')^2\right)' = 2\,y'\,y''$ a že $(F\,(y))' = f(y)\,y'$ ($F(y)$ je primitivní funkce k $f(y)$), tudíž dostanu

$$\left((y')^2\right)' = 2\,(F(y))'\,.$$

Po zintegrování a odmocnění dostanu výraz

$$y' = \pm\sqrt{2\,F(y) + C} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C}.$$

Což je ve tvaru separovaných proměnných a to už umím.

<u>*příklad*</u>

$$y'' = \cos y$$

Vynásobím a upravím

$$2\,y'\,y'' = 2\,y'\,\cos y.$$

$$\left((y')^2\right)' = 2\left(\int \cos y dy\right)'.$$

Zintegruji obě strany a odmocním

$$y' = \pm\sqrt{\sin y + C}.$$

Což je rovnice principielně řešitelná separací proměnných. Žel ji zintegrovat neumím, ale to je v principu také řešení :) .

- $y'' = f\,(x)$ nebo $y'' = C$
  Jednoduše vyřeším dvojím integrováním.

<u>*příklad*</u>

$$y'' = x\,\cos x$$

Zintegruji poprvé (per-partes)

$$y' = x\,\sin x + \cos x + C_1.$$

A podruhé

$$y = -x\,\cos x + 2\sin x + C_1 x + C_2.$$

## VII. Lineární rovnice n-tého řádu

*předpis*:

$$a_0(x) + a_1(x)\,y' + \cdots + a_n(x)\,y^{(n)} = 0.$$

Pokud znám jedno řešení dané rovnice $y_1$, jsem schopen snížit řád rovnice na $n-1$. A to tím, že zavedu následující substituci

$$y(x) = y_1(x)\,z(x).$$

Protože $y_1$ řeší rovnici, dostanu rovnici, ve které se odečte člen obsahující jen $z(x)$. Zavedením substituce $w(x) = z'(x)$ snížím stupeň rovnice o 1.

## VII. Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu

*předpis*:

$$y'\,N(x,y) + M(x,y) = 0.$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Hledám potenciál $V(x,y)$, který této rovnici vyhovuje.

Pokud platí, že

$$dV(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = M\ ,\ \frac{\partial V}{\partial y} = N$$

pak je řešením $V = konst.$.

Jelikož hledám spojité řešení, musí být splněna nutná podmínka záměnnosti smíšených derivací

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \underline{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}.$$

Tvar samotného potenciálu pak získám integrací $M$ a $N$ podle příslušných proměnných.

<u>*příklad*</u>

$$3\left(x^2 + y^2\right)dx + 6xydy = 0$$

Ověřím nutnou podmínku

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x} = 6y.$$

Vidím, že je splněna. Zintegruji první člen podle $x$

$$\int 3(x^2 + y^2)dx = x^3 + 3xy^2 + C(y).$$

Parciálně zderivuji podle $y$, abych porovnáním se členem $N$ zjistil hodnotu konstanty $C(y)$. Zde je to zjevně konstanta na $y$ nezávislá. Výsledný potenciál tedy je

$$V(x,y) = x^3 + 3xy^2 + C.$$

Pokud není nutná podmínka splněna, hledám **integrační faktor** $(\mu\,(\Phi\,(x,y)))$. Když jím rovnici vynásobím, nutná podmínka již bude splněna.

$$dx\,M(x,y)\,\mu\,(\Phi\,(x,y)) + dy\,N(x,y)\,\mu\,(\Phi\,(x,y)) = 0.$$

Nutná podmínka tedy má tvar

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(M(x,y)\,\mu\,(\Phi\,(x,y))\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)\,\mu\,(\Phi\,(x,y))\right).$$

Zderivuji, upravím a dostanu vztah pro integrační faktor

$$\frac{\mu'(\Phi)}{\mu(\Phi)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \Phi}{\partial x} - M\frac{\partial \Phi}{\partial y}}.$$

Pokud se mi výraz na pravé straně podaří vyjádřit jako funkci od $\Phi(x,y)$, mám vyhráno a vyřešením této diferenciální rovnice získám integrační faktor $\mu$. Zde je největší kámen úrazu uhádnout tvar této funkce od $\Phi$. Nejčastěji zkouším hledat $\Phi$ ve tvaru samotných $x$ nebo $y$, jejich součtu, součinu nebo podílu. Ne vždy se mi to však musí podařit.

*příklad*

$$xy^2\,dx + (x^2y - x)dy = 0$$

Označím si $M = xy^2$ , $N = x^2y - x$. Je vidět, že nutná podmínka splněna není, proto hledám integrační faktor podle výše uvedeného vztahu.

$$\frac{\mu'(\Phi)}{\mu(\Phi)} = \frac{2xy - 2xy + 1}{(x^2y - x)\frac{\partial \Phi}{\partial x} - xy^2\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{-1}{xy^2\frac{\partial \Phi}{\partial y} - x^2y\frac{\partial \Phi}{\partial x} + x\frac{\partial \Phi}{\partial x}}.$$

Vidím, že ve jmenovateli by se mi 2 první členy mohly odečíst, pokud parciální derivace budou u prvního $x$ a u druhého $y$. To splňuje funkce

$$\Phi(x,y) = x\,y,$$

Dosadím a zkusím, jestli to nevyjde.

$$\frac{\mu'(\Phi)}{\mu(\Phi)} = \frac{-1}{x^2y^2 - x^2y^2 + xy} = \frac{1}{\Phi}$$

Jak je vidět, vyšlo nám to. Tuto rovnici lehce vyřeším separací proměnných a dostanu integrační faktor ve tvaru

$$\mu = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{xy}.$$

Tímto faktorem vynásobím původní rovnici.

$$ydx + (x - \frac{1}{y})dy = 0.$$

Nutná podmínka $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ je splněna, mohu začít hledat potenciál.

$$\int M dx = \int y dx = xy + C(y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y} xy + C(y) = x + C'(y) = N = x - \frac{1}{y}.$$

Opět jednoduchá rovnice řešitelná separací proměnných $C(y) = -\ln y + C$.
Potenciál má tedy tvar

$$V(x, y) = xy - \ln y + C$$