Křivka může být zadána různými způsoby. Nejobvyklejší zadání (a pokud nebude řečeno jinak, právě toto zadání bude použito) je jako spojitý obraz kompaktního intervalu z $\mathbb{R}$. Jedná se vlastně o parametrické zadání, protože spojité zobrazení $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je n-tice spojitých reálných funkcí jedné proměnné definovaných na $[a, b]$.

Křivka v rovině je tedy popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t)); t \in [a, b]\}$.

Křivka v prostoru je popsána spojitými funkcemi $\varphi, \psi, \tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako množina bodů $\{(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)); t \in [a, b]\}$.

Počáteční bod křivky je $\Phi(a)$, koncový bod je $\Phi(b)$ (pokud není orientace stanovena jinak – viz dále). Křivky, u kterých počáteční a koncový bod splývají, se nazývá *uzavřené*.

Nechť jsou dány dvě křivky C_1, C_2 definované funkcemi $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a $\Psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$, přičemž koncový bod křivky C_1 je počáteční bod křivky C_2, tj. $\Phi(b) = \Psi(c)$. Spojením obou křivek se rozumí křivka, značená jako $C_1 + C_2$, definovaná funkcí $T(t)$ na intervalu $[a, b + d - c]$ předpisem

$$T(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{pro } t \in [a, b]; \\ \Psi(t + c - b), & \text{pro } t \in [b, b + d - c]. \end{cases} .$$

Je zřejmé, jak se definuje spojení tří a více křivek.

V dalším textu bude používán pojem hladká křivka. Je-li křivka popsána parametricky funkcemi φ, ψ, znamená to:

1. funkce φ, ψ mají spojité první derivace;
2. pro každé $t \in [a, b]$ je aspoň jedna z derivací $\varphi'(t), \psi'(t)$ nenulová;
3. každý bod křivky je obrazem jediného bodu z $[a, b]$ s jedinou možnou výjimkou: počáteční a koncový bod mohou splývat.

Po částech hladká křivka je křivka, která vznikla spojením konečně mnoha hladkých křivek.

DEFINICE. Nechť je dána reálná funkce f na po částech hladké křivce v rovině zadané parametricky funkcemi φ a ψ na intervalu $[a, b]$. Pak se definuje křivkový integrál 1.druhu funkce f podél křivky C jako

$$\int_C f(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^b f((\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany, poslední nerovnost platí, pokud existuje levá strana.

1. $\int_C (\alpha f(s) + \beta g(s))\, \mathrm{d}s = \alpha \int_C f(s)\, \mathrm{d}s + \beta \int_C g(s)\, \mathrm{d}s$;
2. $\int_{C_1+C_2} f(s)\, \mathrm{d}s = \int_{C_1} f(s)\, \mathrm{d}s + \int_{C_2} f(s)\, \mathrm{d}s$;
3. $\int_{-C} f(s)\, \mathrm{d}s = \int_C f(s)\, \mathrm{d}s$;
4. $|\int_C f(s)\, \mathrm{d}s| \le L(C) \max_{s \in C} |f(s)|$, kde $L(C)$ je délka křivky C.

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY 2.DRUHU

DEFINICE. Nechť je dána rovinná po částech hladká orientovaná křivka C funkcemi φ, ψ na intervalu $[a, b]$ a funkce f na C s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ se souřadnicemi (f_1, f_2).

Pak se definuje křivkový integrál 2.druhu funkce f podle křivky C jako

$$\int_C \mathbf{f}(s) . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_C \left(f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy} \right) = \int_a^b \left(f_1(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_2(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right) \mathrm{d}t \, .$$

POZOROVÁNÍ. Následující 3 rovnosti platí, jakmile mají smysl pravé strany.

1. $\int_C (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \alpha \int_C \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} + \beta \int_C \mathbf{g} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$;
2. $\int_{C_1 + C_2} \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \int_{C_1} \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} + \int_{C_2} \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$;
3. $\int_{-C} \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t} = - \int_C \mathbf{f} . \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}$;

POZOROVÁNÍ.

$$\int_C \left(f_1(x,y)\,\mathrm{dx} + f_2(x,y)\,\mathrm{dy} \right) = \int_C \left(f_1(s) \cos \alpha(s) + f_2(s) \sin \alpha(s) \right) \, \mathrm{d}s \, ,$$

kde $\alpha(s)$ je úhel, který svírá tečný vektor k C v bodě s s osou x.

VĚTA. (Green) Nechť H je otevřená množina v rovině obsahující jednoduše uzavřenou křivku C i s jejím vnitřkem ιC a $f = (f_1, f_2)$ je funkce $H \to \mathbb{R}^2$ mající spojité parciální derivace na H. Pak platí

$$\int \qquad \int \left(\partial f_2 \quad \partial f_1 \right)$$

POZOROVÁNÍ.

1. Délka po částech hladké křivky C je rovna $\int_C \, \mathrm{d}s$.
2. Hmotnost tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C, který má v bodě s hustotu $h(s)$, je rovna $\int_C h(s) \, \mathrm{d}s$.
3. Těžiště tenkého drátu majícího tvar po částech hladké křivky C, který má v bodě s hustotu $h(s)$, má souřadnice (T_x, T_y), kde (m značí hmotnost drátu)

$$T_x = \frac{\int_C x h(s) \, \mathrm{d}s}{m} \, , \quad T_y = \frac{\int_C y h(s) \, \mathrm{d}s}{m} \, .$$