Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Diplomová práce

Mgr. Eva Kleknerová

RŮZNÉ TYPY INTEGRÁLŮ A JEJICH APLIKACE

Fakulta aplikovaných věd

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petr Tomiczek, CSc. - KMA

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední školy,
matematika - technická geometrie

Ráda bych na tomto místě poděkovala panu RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc. za vedení mé práce a za poskytnuté odborné rady. Ráda bych poděkovala také panu RNDr. Josefu Voldřichovi, CSc. za pomoc při studiu náročnějších partií matematické analýzy.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčením práce.

V Plzni dne 11.5.2009 Eva Kleknerová

Obsah

1 Úvod

1.1 Obsah práce

Integrál je jedním ze základních pojmů matematické analýzy a matematiky vůbec. Velké množství aplikací najdeme nejen v matematických disciplínách, ale i ve fyzice, mechanice, ekonomii a dalších technických oborech. Znalost integrálního počtu funkcí jedné proměnné je předpokladem ke studiu integrálního počtu funkcí více proměnných, integrálních transformací, apod.

Vznik integrálního počtu motivovaly (mimo jiné) dvě úlohy. První z nich je nalezení funkce, je-li známa její derivace, druhou je výpočet plochy, která je omezena grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Tyto dvě úlohy také vedly k pojmu neurčitý a určitý integrál. Pojem integrálu se vyvíjel s rozvojem matematiky, prošel řadou změn a byl předmětem mnoha zobecnění. Postupem času vznikaly stále více obecnější integrály.

Řekneme-li, že daná funkce má v nějakém intervalu integrál, nevyjadřujeme se úplně přesně, pokud neřekneme (nebo pokud není například ze souvislosti jasné), o jakém integrálu mluvíme. Existuje totiž několik definic určitých integrálů a je možné, že integrál funkce v daném intervalu existuje podle jedné definice a podle jiné ne (pokud integrál existuje podle dvou definic, pak jejich hodnoty bývají stejné). Cílem této práce je uvést zde několik nejvýznamnějších definic integrálů a zhodnotit, které funkce jsou integrovatelné podle dané definice a které nikoliv, poukázat na jejich přednosti i nedostatky. Budeme pracovat pouze s funkcemi jedné reálné proměnné a s jednorozměrným integrálem. Práce je rozdělena na 8 kapitol. První kapitola zahrnuje tento úvod a malé nahlédnutí do historie integrálu, druhá až šestá kapitola je věnována jednotlivým druhům určitých integrálů, po řadě Newtonovu, Riemannovu, Lebesgueovu, Perronovu a Kurzweilovu integrálu. Jsou zde uvedeny definice, vlastnosti integrálů a na příkladech je ukázáno, které funkce mají nebo nemají integrál podle dané definice. Sedmá kapitola je nejen malou rekapitulací, ale kromě vět o vzájemných vztazích uvedených druhů integrálů obsahuje i jejich důkazy. Jako nejnáročnější část předkládané práce umožňuje hlubší nahlédnutí do problematiky integrálů. Poslední kapitola je závěr.

V celé práci se užívá obvyklé značení, pro přehlednost je před znakem integrálu identifikační písmeno, které označuje, o který integrál se jedná. Je-li vynecháno, jedná se pak o integrál z názvu příslušné kapitoly.

1.2 Historie integrálu ve zkratce

Integrální a diferenciální počet, souhrnně nazývaný infinitezimální počet ("infinitezimalis" v překladu "nekonečně malý"), vytvořili v 17. století slavný anglický matematik a fyzik Isaac Newton (1642 - 1727) a německý matematik, filosof, teolog a právník Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Tito dva matematikové jej vytvořili téměř současně a nezávisle na sobě. Postupy, kterými dospěli ke svým výsledkům, se ale liší. Prvenství tohoto objevu přisuzujeme oběma vědcům.

Prvopočátky a principy metod, které Newton s Leibnizem rozvíjeli, lze nalézt v době antiky. O další rozvoj infinitezimálních metod se pak později postarali bezprostřední předchůdci Newtona a Leibnize v 16. a 17. století. Newtonova a Leibnizova práce byla tedy ucelením a dovršením toho, co započali jejich předchůdci.

Starořecká matematika, jejíž největší rozvoj datujeme zhruba od 6. století př. Kr. do 2. století př. Kr., byla velmi vyspělá, nashromáždila velké množství poznatků a rozvinula mnoho výpočetních postupů. A právě postupy, jakými se vypočítávaly obsahy ploch a objemy těles, se staly později základem pro vznik integrálu. V tomto směru byla významnou předchůdkyní infinitezimálních úvah tzv. exhaustivní metoda, která byla v té době v Řecku rozvinuta. Tvůrcem metody je Eudoxos z Knidu (410 nebo 408 př. Kr. - 355 nebo 347 př. Kr.). Metoda umožňuje získat přibližný výpočet obsahu křivočarého obrazce v libovolném stupni přesnosti tak, že se tomuto obrazci vepisují (a později i opisují) mnohoúhelníky. Základem metody je tvrzení: "Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než je její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit dostatečně dlouho, zbyde veličina, která bude menší než libovolná kladná předem daná veličina." Vyčerpáváme-li například kruh mnohoúhelníkem, lze podle Eudoxova principu zbývající - nevyčerpané - části libovolně zmenšit. Slovo exhaustivní bylo odvozeno z latinského "exhaurio", což v překladu znamená "vyčerpávati". Tuto metodu na určení obsahu ploch později rozvinul Archimédes ze Syrakus (asi 287 - 212 př. Kr.) a zobecnil ji. U Archiméda existovaly horní a dolní integrální součty, které danou veličinu omezovaly, a jejich rozdíl se mohl stanovit libovolně malý (ne však nekonečně malý; pro antickou matematiku bylo typické popírání nekonečně malých veličin). Stanovil hodnotu konstanty π nerovností $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ tak, že kruhu opisoval a vepisoval pravidelné mnohoúhelníky, počínaje šestiúhelníkem a konče devadesátšestiúhelníkem. Pomocí exhaustivní metody dokázal mnoho tvrzení. Archimédovo dílo mělo vliv na pozdější rozvoj matematiky. Metody a ideje obsažené v jeho pracích se prostřednictvím arabských překladů uchovaly do novověku a inspirovaly matematiky 16. a 17. století. Infinitezimální postupy, které se poprvé objevily v antickém Řecku, nemohly být do této doby více rozvíjeny, neboť zde chyběl potřebný matematický aparát.

Zdá se, že raný křesťanský středověk k rozvoji matematiky významněji nepřispěl. Nicméně na prahu vrcholného středověku (12. - 13. století) začalo docházet k zásadnímu obratu. Prvním podnětem změny bylo to, že (především zásluhou Tomáše Akvinského) došlo k rozvoji racionální středověké filosofie, která navázala na antického učence Aristotela. Ve vztahu k matematice je vhodné zdůraznit, že v návaznosti na Aristotelovu logiku došlo k dalšímu rozvoji logiky (a deduktivního, "matematického" myšlení). Začaly se studovat a do latiny překládat antické spisy. Druhým podnětem bylo setkání křesťanů s islámskou kulturou především na Iberském poloostrově. Do latiny byly z arabštiny přeloženy spisy učence 9. století al-Khwarizmi (první překlad vznikl roku 1140), "otce algebry a algoritmů". Jeho zásluhou se tak křesťanský svět nejen dozvěděl o indické číselné soustavě (tedy o našich dnešních užívaných arabských číslicích), ale i o mnoha jeho výsledcích a výsledcích antické matematiky. Sémě bylo zaseto, nicméně ještě několik století (do doby renesance) trvalo, než vyrostly zřetelné plody. Nové technické vynálezy a astronomie tento rozvoj matematiky podporovaly. Také objev knihtisku měl velký vliv na rozvoj matematiky. V 16. století francouzský matematik Francois Viete (1540 - 1603) zavedl do matematiky užívání písmen ve významu čísel. V univerzitní matematice se rodila myšlenka funkční závislosti a jejího grafického znázornění, pozornost byla věnována také studiu křivek. Matematikové z různých zemí se zabývali takovými problémy, při jejichž řešení se používalo infinitezimálních metod. Například Johanes Kepler a Bonaventura Cavalieri vypočítávali objemy těles tak, že těleso rozdělili na nekonečný počet nekonečně malých objektů, jejichž objem lze snadno vypočítat, Pierre Fermat a jiní při konstrukci tečny ke křivce pracovali s charakteristickým trojúhelníkem.

Významným podnětem pro rozvoj matematiky a i infinitezimálních postupů byl počátkem 17. století objev analytické geometrie René Descartem (1596-1650). Descartes vypracoval úplný systém analytické geometrie, když sloučil geometrii a algebru, která právě v tomto období dosáhla velkého rozvoje. Použití souřadnic umožnilo řešit geometrické problémy početními metodami analýzy a algebry a současně zaobalilo algebraické úvahy názornějším geometrickým pláštěm. Mnohé problémy bylo možné řešit obecně. Problémy, při jejichž řešení se používalo infinitezimálních veličin, nabyly díky analytické geometrii jednotného rázu a vyústily ve dva důležité obecné problémy. Prvním z nich bylo určování obsahů ploch omezených danou křivkou (tzv. kvadratura) a druhým problémem bylo stanovení tečny k dané křivce v jejím daném bodě. Diferenciální a integrální počet se v této době vyvíjely nezávisle na sobě.

V druhé polovině 17. století byly infinitezimální postupy hodně rozpracovávány, byla odvozena některá pravidla na výpočet derivací a integrálů, chyběl však jednotný a ucelený systém pravidel a pojmů. Ten vypracovali koncem 17. století již zmínění Newton a Leibniz. Newton s Leibnizem sjednotili infinitezimální počet, dali mu pevný řád, výpočetní algoritmy a vytvořili tak novou obecnou metodiku. Došlo ke vzájemnému propojení metod integrování a derivování. Byly odvozeny všechny základní vztahy pro derivování, byly vypracovány tabulky integrálů, určitý a neurčitý integrál byl definován pomocí primitivní funkce. Určitý integrál se začal počítat podle vztahu $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, kde $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ je funkce primitivní k funkci f v intervalu (a,b). Došlo také k propojení určitého a neurčitého integrálu. Srovnáme-li přístup Newtona a Leibnize k infinitezimálnímu počtu, lze vedle společné myšlenky o inverzi derivování a integrování pozorovat rozdíly. Newton věnoval velkou pozornost mechanice, jeho úvahy vycházely z kinematických představ (svou teorii o infinitezimálním počtu uvedl pod názvem Teorie fluxí), integrál zavedl pomocí primitivní funkce, Leibnizův postup byl geometrického rázu, integrál chápal jako "nekonečný součet diferenciálů". Newton kladl důraz více na konkrétní výsledky, řešil úlohy praktického charakteru, kdežto Leibniz vytvářel obecné metody, snažil se sjednotit přístup k různorodým problémům. Velkou Leibnizovou zásluhou také je, že do diferenciálního a integrálního počtu zavedl stručnou a účelnou symboliku, zavedl pojmy funkce, proměnná, konstanta.

Problémem matematické analýzy na konci 17. století byl její nespolehlivý základ. Nebylo jasné, co jsou nekonečně malé veličiny, tyto veličiny byly někdy uvažovány jako nulové, jindy se naopak předpokládalo, že jsou nenulové. To bylo důvodem mnoha kritik. Přesto se infinitezimálního počtu v 18. století ujalo mnoho matematiků, kteří jej rozvíjeli dál.

V 18. století se matematická analýza vyčlenila jako samostatná věda, výpočetní metody infinitezimálního počtu byly užívány zejména ve fyzikálních a technických aplikacích matematiky. Koncem 18. století bylo již nahromaděno velké množství poznatků, které ale neměly pevný základ, protože některé pojmy nebyly dostatečně přesně zavedeny. Jádro problému spočívalo v neuspokojivém chápání potencionálního a aktuálního nekonečna a v jejich exaktním matematickém vyjádření. Nejasnosti byly především kolem nekonečně malých veličin, limit, konvergencí řad, a také kolem derivací a integrálů. Toto období bývá historiky nazýváno jako 2. krize matematiky. Krize byla překonána v 19. století, kdy Bernard Bolzano a Louis Augustin Cauchy zahájili období zpřesňování matematické analýzy. Byl zaveden pojem limity a později Karl Weierstrass zavedl "$\varepsilon - \delta$" jazyk současné analýzy. Matematikové se začali zabývat otázkou zpřesnění definice integrálu. V této době se integrovalo podle Newtonova vztahu, na Eudoxovu metodu se pozapomnělo a jejího principu se užívalo pouze ve zvláštních případech, kdy k dané funkci nebylo možné nebo vhodné primitivní funkci určit. Zpřesnění pojmu integrálu se v této době věnoval L. A. Cauchy, B. Riemann a další. Bernard Riemann (1826 - 1866) zavedl novou konstruktivní, součtovou definici integrálu, kterou se vrátil k řecké exhaustivní metodě. Riemannova definice integrálu zahrnuje i některé velmi silně nespojité funkce. V tomto období se zkoumaly integrovatelné funkce, matematikové přicházeli s novými exotickými funkcemi, pro které nemusí existovat Newtonův či Riemannův integrál. To vedlo k myšlence zavést takový integrál, který by zahrnoval jak Newtonův, tak i Riemannův integrál.

Počátkem 20. století francouzský matematik Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941) zavedl nový typ součtového integrálu, po něm nazvaný Lebesgueův integrál, který byl výrazným "rozšířením" integrálu Riemannova. Tento integrál je založen na pojmu teorie míry, která byla počátkem 20. století vytvořena. Byl obecnější a zahrnoval větší množinu funkcí. Lebesgueův integrál byl brzy rozpracován do mnohých aplikací a je dodnes jedním z hlavních pojmů matematické analýzy (a disciplín jako funkcionální analýza, počet pravděpodobnosti atd., které se bez matematické analýzy neobejdou). Ukázalo se ale, že pomocí tohoto integrálu nelze integrovat každou derivaci. Lebesgueův integrál dovede integrovat pouze derivace absolutně spojitých funkcí, to znamená, že neplatí obecně Newtonův - Leibnizův vzorec. To vedlo matematiky 20. století k zavedení takového integrálu, který by tyto nedostatky odstranil.

Ve 20. letech 20. století německý matematik Oskar Perron (1880 - 1975) nalezl řešení v podobě neabsolutně konvergentního integrálu, který vedl k odstranění nesrovnalostí mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem. Perronův integrál zahrnuje Newtonův i Lebesgueův (a tedy i Riemannův) integrál. Jeho definice je ale těžkopádná, integrál je navíc nepříjemný například při integrování přes vícerozměrné oblasti.

V 60. letech 20. století byl vytvořen nový integrál českým matematikem Jaroslavem Kurzweilem (1926). Definice tohoto integrálu se poprvé objevila v roce 1957 v jeho práci "Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parametr" publikované v časopise Czechoslovak Mathematical Journal. Tato práce se týkala spojité závislosti na parametru pro obyčejné diferenciální rovnice (ODR). Nová teorie integrálu zde nebyla cílem, ale prostředkem k vysvětlení jistých konvergenčních jevů v teorii ODR a k definování tzv. zobecněných diferenciálních rovnic. Protože pojem integrálu zde měl pomocnou povahu, nevěnovali jí matematikové zabývající se teorií integrálu pozornost. O něco později tento způsob integrace objevil - nezávisle na J.Kurzweilovi - britský matematik Ralph Henstock (1923). V literatuře se proto objevují názvy Kurzweilův, Henstockův, Kurzweilův - Henstockův, Henstockův - Kurzweilův integrál. Kurzweilův integrál stejně jako Perronův integrál zahrnuje Newtonův i Lebesgueův integrál, je tedy obecnější, přitom Kurzweilův integrál dovoluje integrovat každou derivaci. V definici Kurzweilova integrálu jsou navíc použity elementárnější prostředky než u integrálu Lebesgueova nebo Perronova. Pojem Kurzweilova integrálu se koncem 20. století stává důležitou součástí matematické analýzy a začíná se naplno uplatňovat v aplikacích a ve výzkumu.

2 Newtonův integrál

2.1 Primitivní funkce

Definice 2.1. Nechť funkce f, F jsou dvě funkce definované na otevřeném intervalu (a, b) (lze připustit $a = -\infty$, $b = \infty$). Řekneme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b), jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí:

$$F^{'}(x) = f(x)\,.$$

Příklad 2.2. Funkce $F(x) = \frac{x^3}{3}$ je primitivní funkce k funkci $f(x) = x^2$ v $(-\infty, \infty)$, protože platí $F'(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Věta 2.3. Nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b). Pak i funkce G daná rovnicí $G(x) = F(x)+C$, kde C je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b).

Primitivních funkcí k funkci f v (a, b) existuje nekonečně mnoho. Je-li $F(x)$ jedna z primitivních funkcí k funkci $f(x)$, pak všechny ostatní mají tvar $F(x) + C$ (neboť $F^{'}(x) = (F(x)+C)^{'}$), tzn. jsou dány jednoznačně až na konstantu. Všechny primitivní funkce k funkci f v (a, b) tvoří množinu $\{G|G(x) = F(x) + C,\ x \in (a, b),\ C \in \mathbb{R}\}$, což je předmětem následující věty.

Věta 2.4. Nechť funkce F, G jsou dvě primitivní funkce k funkci f v (a, b). Pak existuje takové $C \in \mathbb{R}$, že pro každé $x \in (a, b)$ je $F(x) = G(x) + C$.

Věta 2.5. Nechť funkce f je spojitá v otevřeném intervalu (a, b). Pak k ní existuje na tomto intervalu primitivní funkce.

Poznámka 2.6.

1. Množinu všech funkcí spojitých na (a, b) (resp. na $\langle a, b\rangle$) označme $\mathcal{C}(a, b)$ (resp. $\mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$).
2. I když ke každé spojité funkci existuje primitivní funkce, v mnoha případech nelze tato primitivní funkce vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Například $\int e^{-x^2}dx$. Tento integrál definuje transcendentní funkci.

Věta 2.7. Nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b). Pak F je v (a, b) spojitá.

Pojem primitivní funkce na intervalu (a, b) lze rozšířit i na uzavřený interval $\langle a, b\rangle$. Pokud potřebujeme pracovat s primitivní funkcí na uzavřeném intervalu, pak v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ uvažujeme jednostranné derivace.

2.2 Neurčitý integrál

Definice 2.8. Řekneme, že funkce f má integrál v intervalu (a, b) právě tehdy, když má primitivní funkci v (a, b). Má-li funkce f integrál v (a, b), nazýváme množinu všech primitivních funkcí v (a, b) neurčitým integrálem funkce f v (a, b) a značíme jej

$$\int f(x)\, dx \quad \textit{nebo} \quad \int f\,.$$

Je-li funkce F primitivní funkcí k f, značí symbol $\int f(x)dx$ množinu všech primitivních funkcí, tj. $\int f(x)dx = \{G | G(x) = F(x) + C, x \in (a, b), C \in \mathbb{R}\}$. Zapisujeme stručněji

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \;\; C \in \mathbb{R}\,.$$

Základní vzorce pro integrování plynou ze vzorců pro derivování a lze je nalézt například v [1], [5].

2.2.1 Vlastnosti neurčitého integrálu

Základní vlastností všech typů integrálů je linearita.

Věta 2.9. Nechť funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b), nechť funkce G je primitivní funkcí k funkci g v intervalu (a, b) a nechť r je číslo. Pak platí:
a) $F + G$ je primitivní funkcí k $f + g$ v (a, b)
b) rF je primitivní funkcí k rf v (a, b).
Nechť funkce f, g mají neurčité integrály v (a, b). Pak platí:
a) Funkce $f + g$ má neurčitý integrál v (a, b) a platí

$$\int (f + g) = \int f + \int g\,,$$

b) funkce rF má neurčitý integrál v (a, b) a platí

$$\int rf = r \int f\,.$$

Větu lze rozšířit pro libovolný konečný počet funkcí.

2.2.2 Metody integrace

Jednou ze základních úloh integrálního počtu je nalezení primitivní funkce (resp. množiny všech primitivních funkcí). Účinnými metodami pro hledání primitivní funkce, neboli integrování, jsou následující:

1. Metoda integrace per partes

   Metoda vychází ze vzorce pro derivaci součinu. Touto metodou nevypočteme daný integrál přímo, ale převedeme jej na jiný integrál. Metodu lze užít opakovaně, lze dospět i k rekurentním vzorcům.

   Věta 2.10. Nechť funkce f a g mají spojité derivace v (a, b). Pak v tomto intervalu platí:

   $$\int fg' = fg - \int f'g\,.$$

   Příklad 2.11. Najděme primitivní funkci k funkci $f(x) = \ln x$.

   $$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int 1\,dx = x \ln x - x + C,\ x \in (0, \infty)$$

   $(u = \ln x,\ u' = \frac{1}{x},\ v = x,\ v' = 1)$

2. Substituční metoda

   Důležitou metodou integrace je substituční metoda, která je založená na dvou následujících větách.

   Věta 2.12 (Substituční metoda I). Nechť existuje integrál $\int f(x)\,dx$ v intervalu (a, b), nechť φ je funkce diferencovatelná v intervalu (α, β) a nechť zobrazuje tento interval do intervalu (a, b). Pak v (α, β) existuje integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ a platí

   $$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Příklad 2.13. Vypočítejme $\int \cos^3 x\, dx$. Integrovanou funkci můžeme zapsat ve tvaru $(1 - sin^2 x)\cos x$ a pak použít substituci $t = \sin x$:

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1 - sin^2 x)\cos x\, dx = \int (1 - t^2)\, dt =$$

$$= t - \frac{1}{3}t^3 = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Věta 2.14 (Substituční metoda II). Nechť existuje v intervalu (α, β) integrál $\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$ a nechť φ je funkce diferencovatelná v intervalu (α, β), nechť $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ a nechť funkce φ zobrazuje tento interval na interval (a, b). Pak v (a, b) existuje integrál $\int f(x)\, dx$ a platí

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt\,.$$

2.3 Určitý integrál

Neurčitý integrál představuje množinu funkcí, určitý integrál dané funkce v daném intervalu je konkrétní reálné číslo. Mezi oběma těmito druhy integrálů existuje souvislost. Existuje několik přístupů, jak zavést pojem určitý integrál a podle způsobu zavedení se mění množina integrovatelných funkcí. Tvůrci integrálního počtu Newton a Leibniz vycházeli ze dvou odlišných idejí. Leibniz pojal integrál jako limitu součtu a exaktní provedení této ideje bylo později dílem Riemanna. Dalším zobecněním je pak definice Lebesgueova a později Kurzweilova integrálu. Oproti tomu Newton, a později i Perron, vyšel při svých úvahách z diferenciálního počtu a z primitivní funkce. V následujícím textu bude popsán Newtonův, Riemannův, Lebesgueův, Perronův a Kurzweilův integrál a jejich vlastnosti a budou popsány množiny funkcí, které mají integrál podle dané definice.

2.3.1 Definice Newtonova určitého integrálu

Definice Newtonova určitého integrálu pochází z konce 17. století od tvůrců integrálního počtu Isaaca Newtona a W. G. Leibnize. Tato definice určitého integrálu je tzv. deskriptivní (popisnou) definicí, integrál je popsán pomocí primitivní funkce.

Definice 2.15. Nechť funkce f je definována v otevřeném intervalu (a, b). Nechť

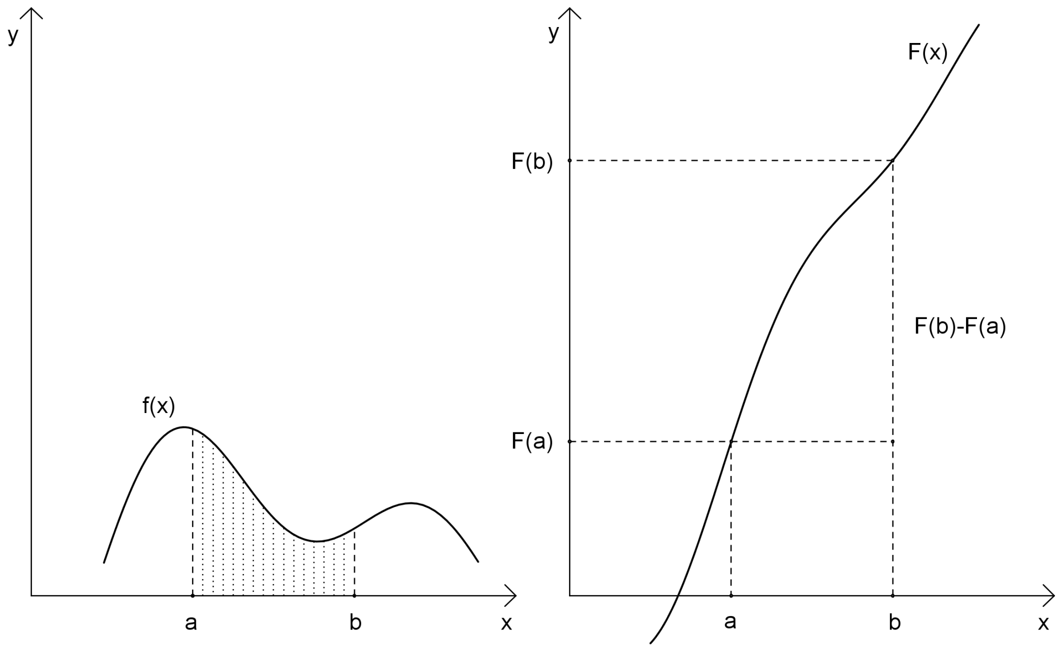
a) existuje primitivní funkce F k funkci f v (a, b), tj. pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F^{'}(x) = f(x)$

b) existují vlastní limity $\lim\limits_{x \to a+} F(x)$, $\lim\limits_{x \to b-} F(x)$.

Potom Newtonův integrál funkce f od a do b definujeme vztahem

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)\,.$$

Množinu všech funkcí majících v (a, b) Newtonův integrál značíme $\mathcal{N}(a, b)$.



Obrázek 1: K definici Newtonova integrálu.

Poznámka 2.16.

1. Místo $\lim\limits_{x \to b-} F(x) - \lim\limits_{x \to a+} F(x)$ často píšeme jen $[F(x)]_a^b$.
2. Předchozí definice říká, kdy má integrál smysl. Jeho hodnota však může být i nevlastní. Je-li hodnota integrálu vlastní, také říkáme, že integrál konverguje, je-li jeho hodnota nevlastní, říkáme, že integrál diverguje.

3. Newtonův určitý integrál nezávisí na volbě primitivní funkce. Pro jinou primitivní funkci $G(x) = F(x) + C$ dostaneme stejnou hodnotu Newtonova integrálu $(N)\int_a^b f(x)\,dx$, neboť $G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$.
4. Je-li F je primitivní funkce k funkci f dokonce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je na tomto intervalu omezená a není nutno požadovat limity, $\lim\limits_{x\to a+} F(x) = F(a)$ a $\lim\limits_{x\to b-} F(x) = F(b)$ a Newtonův integrál je $(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. S tímto případem se lze setkat často.
5. Newtonův integrál může existovat i pro neomezené intervaly. Je-li b v intervalu (a, b) nevlastní, chápeme $x \to b-$ jako $x \to \infty$ a počítáme $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. Newtonův integrál může existovat i pro neomezené funkce.

Příklad 2.17. Uvažujme funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ v $\langle 0, 1)$. Integrál funkce je $(\mathcal{N})\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim\limits_{x\to 1-} \arcsin x - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Newtonův integrál je definován pomocí primitivní funkce. Hledání primitivní funkce je často náročné a k mnoha funkcím (např. $\frac{\sin x}{x}$ nebo e^{-x^2} uvažovaných na $(0, \infty)$) nelze primitivní funkci analyticky sestrojit. Existují však kritéria, která zaručují existenci Newtonova integrálu $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$, aniž bychom jej počítali.

Věta 2.18. Ke každé funkci spojité v (a, b) existuje $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (tzn. $\mathcal{C}(a, b) \subset \mathcal{N}(a, b)$).

Věta 2.19. Nechť $\forall t \in (a, b)$ jsou $f, g \in \mathcal{N}(\langle a, t\rangle)$ a $\forall x \in \langle a, b)$ platí $0 \le f(x) \le g(x)$. Pak platí:

a) konverguje-li $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, pak konverguje i $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

b) diverguje-li $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, pak diverguje i $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Příklad 2.20. Rozhodněme, zda integrál $\int\limits_0^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^2+1}\,dx$ konverguje či diverguje. Integrovaná funkce je kladná, neboť exponenciála nabývá pouze kladných hodnot. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je $-1 \le \sin x \le 1$. Postupnou úvahou dostaneme: $\sin x \le 1$, $e^{\sin x} \le e^1$, $0 < \frac{e^{\sin x}}{x^2+1} \le \frac{e^1}{x^2+1}$. Funkce $h(x) = \frac{e}{x^2+1}$ je tedy majoranta k integrované funkci, integrál z této majoranty konverguje, neboť $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctan} x - \operatorname{arctan} 0 = \frac{\pi}{2}$, a proto i integrál $\int\limits_0^\infty \frac{e^1}{x^2+1}\,dx$ konverguje a konečně i integrál $\int\limits_0^\infty \frac{e^{\sin x}}{x^2+1}\,dx$ konverguje.

Rozhodnout o konvergenci nebo divergenci integrálu z předchozího příkladu hledáním primitivní funkce a nalezením přesné hodnoty integrálu nelze, protože primitivní funkci k integrované funkci nelze nalézt analyticky.

2.3.2 Vlastnosti Newtonova integrálu

Věta 2.21 (Linearita). Nechť $a < b$ a nechť existují integrály $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{N})\int\limits_a^b g(x)\,dx$, nechť c je libovolné číslo. Pak existují i integrály $(\mathcal{N})\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$ a $(\mathcal{N})\int\limits_a^b cf(x)\,dx$ a platí:

$$\text{a) } (\mathcal{N})\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx + (\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\text{b) } (\mathcal{N})\int_a^b cf(x)\,dx = c\,(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Věta 2.22. Nechť $a<b<c$ a nechť existují integrály $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{N})\int\limits_b^c f(x)\,dx$ a nechť funkce f je spojitá v bodě b. Pak existuje i $(\mathcal{N})\int\limits_a^c f(x)\,dx$ a platí:

$$(\mathcal{N})\int_a^c f(x)\,dx = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx + (\mathcal{N})\int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Věta 2.23. Nechť $a < b$ a nechť existuje integrál $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Je-li $f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, pak

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Věta 2.24 (Monotonie). Nechť $a < b$ a nechť existují integrály $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{N})\int\limits_a^b g(x)\,dx$. Pokud $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, pak

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx \geq (\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Poznámka 2.25. Poslední dvě věty jsou ekvivalentní.

Věta 2.26. Nechť $a<b$ a nechť existují integrály $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{N})\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. Pak platí:

$$|(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx| \leq (\mathcal{N})\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Ukazuje se, že vztah konvergence integrálů $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ hraje důležitou roli. V následující definici zavedeme pojmy absolutní a relativní konvergence integrálu, které jsou důležité pro funkce měnící znaménko.

Definice 2.27.

- Jestliže $|\int\limits_a^b f(x)\,dx| < \infty$, říkáme, že integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konverguje.
- Jestliže $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \pm\infty$, říkáme, že $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ diverguje.
- Konverguje-li $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, řekneme, že $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konverguje absolutně.
- Konverguje-li $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, ale $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ diverguje, řekneme, že $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konverguje neabsolutně.

Newtonův integrál patří mezi neabsolutně konvergentní integrály.

Příklad 2.28. Ukažme, že $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ je neabsolutně konvergentní integrál. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je spojitá v $(0,\infty)$, existuje k ní proto primitivní funkce, kterou však nelze vyjádřit analyticky. Zkoumejme $\int\limits_\pi^\infty |\frac{\sin x}{x}|\,dx$ a $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} |\tfrac{\sin x}{x}|\, dx \geq \int\limits_{\pi}^{n\pi} \tfrac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \tfrac{|\sin x|}{x}\, dx > \sum_{k=1}^{n-1} \tfrac{1}{(k+1)\pi} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx =$$

$= \frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \to \infty$ pro $n \to \infty$, neboť se jedná o harmonickou řadu.

Integrál $\int\limits_{\pi}^{\infty} |\frac{\sin x}{x}|\, dx$ diverguje.

V případě druhého integrálu lze uvažovat takto:

$$| \int\limits_{\pi}^{(2n+1)\pi} \tfrac{\sin x}{x}\, dx| = | \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \tfrac{\sin x}{x}\, dx| \leq \sum_{k=1}^{n} | \int\limits_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \tfrac{\sin x}{x}\, dx| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} (| \int\limits_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \tfrac{\sin x}{x}\, dx| - | \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \tfrac{\sin x}{x}\, dx|) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} (\tfrac{1}{(2k-1)\pi} | \int\limits_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin x\, dx| - \tfrac{1}{(2k+1)\pi} | \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x\, dx|) =$$

$= \frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}) = \frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$ a tato řada konverguje pro $n \to \infty$.

Integrál $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ konverguje.

3 Riemannův integrál

Riemannova definice určitého integrálu je tzv. konstruktivní definice a vychází z názorné geometrické představy. Pro spojitou nezápornou funkci f definovanou na $\langle a, b\rangle$ odpovídá její Riemannův integrál na tomto intervalu plošnému obsahu oblasti $M(f, a, b)$ ohraničené přímkami $x = a$, $x = b$, osou x a grafem integrované funkce f. Základní myšlenkou při nalezení integrálu je konstrukce přibližného vyjádření obsahu útvaru $M(f, a, b)$ pomocí Riemannových integrálních součtů (odtud název konstruktivní definice). Tento postup je velmi blízký starověké exhaustivní metodě. Uvedeme zde dvě definice Riemannova integrálu. Nejprve Darbouxovu součtovou definici Riemannova integrálu založenou na horních a dolních integrálních součtech, která bývá v úvodních kurzech často základem výkladu o Riemannově integrálu, druhá v pořadí bude uvedena původní Riemannova definice (z roku 1854). Riemann definoval integrál jako limitu, ke které konvergují integrální součty, konvergují-li délky dílčích intervalů k nule.

3.1 Darbouxova definice určitého Riemannova integrálu

Před vyslovením samotné definice integrálu je nutné zavést některé pojmy.

Definice 3.1. Nechť $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu reálných čísel $x_0, x_1, ..., x_n$ nazveme dělením D intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Intervaly $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, ..., \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ budeme nazývat dílčími intervaly dělení D a jejich délky $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_n - x_{n-1}$ budeme po řadě značit $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$.

Definice 3.2. Nechť $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ je libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, v němž je definována funkce f. Označme znakem M_i supremum a m_i infimum funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, tedy $M_i = \sup\limits_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)$. Číslo

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i$$

nazveme horní součet funkce f příslušný dělení D, číslo

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i$$

nazveme dolní součet funkce f příslušný dělení D.

Věta 3.3. Pro libovolné dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ je vždy $s(D) \leq S(D)$.

Definice 3.4. Nechť $D(\langle a, b\rangle)$ je množina všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť $D_1, D \in D(\langle a, b\rangle)$ a $D \subset D_1$. Pak dělení D_1 nazveme zjemněním dělení D.

Věta 3.5. Nechť dělení D_1 v $\langle a, b\rangle$ je zjemněním dělení D. Pak pro příslušné dolní a horní integrální součty funkce f v $\langle a, b\rangle$ platí

$$s(D) \leq s(D_1) \leq S(D_1) \leq S(D)\,.$$

Věta 3.6. Nechť f je funkce omezená v $\langle a, b\rangle$. Označme $m = \inf\limits_{x \in \langle a, b\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x \in \langle a, b\rangle} f(x)$. Nechť D_1 a D_2 jsou libovolná dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

$$m(b-a) \leq s(D_1) \leq S(D_1) \leq M(b-a) \quad \text{a} \quad s(D_1) \leq S(D_2)\,.$$

Vytváříme-li integrální součty pro čím dál jemnější dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak se hodnoty $S(D)$ a $s(D)$ od sebe liší stále méně a konvergují k hodnotě Riemannova integrálu. Pokud tomu tak není, pak funkce f nemá Riemannův integrál.

Definice 3.7. Nechť funkce f je omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Infimum množiny všech horních součtů funkce f v $\langle a, b\rangle$ nazýváme horní Riemannův integrál funkce f od a do b a značíme

$$\inf_{D(\langle a,b\rangle)} S(D) = \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx\,.$$

Supremum množiny všech dolních součtů funkce f v $\langle a, b\rangle$ nazýváme dolní Riemannův integrál funkce f od a do b a značíme

$$\sup_{D(\langle a,b\rangle)} s(D) = \int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Vždy platí nerovnost

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx\,.$$

Pokud nastává rovnost, pak se tato hodnota nazývá Riemannův určitý integrál funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ a značíme jej

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{nebo} \quad (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Existuje-li Riemannův integrál $(\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx$, pak o funkci říkáme, že je riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Množinu všech riemannovsky integrovatelných funkcí na $\langle a,b\rangle$ značíme $\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Věta 3.8. Omezená funkce f má na $\langle a,b\rangle$ Riemannův integrál právě tehdy, když pro každé $\varepsilon>0$ existuje dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že

$$S(D)-s(D)<\varepsilon\,.$$

3.2 Původní Riemannova definice určitého integrálu

Definice 3.9. Nechť $D=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ je libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Číslo

$$\nu(D)=\max_{i=1,\dots,n}(\Delta x_i)$$

nazveme normou dělení D.

Definice 3.10. Nechť v každém intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$, $i=1,...,n$ je dán libovolně jeden bod $\tau_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$. Pak mluvíme o dělení s význačnými body a označíme jej symbolem (D,τ), tedy

$$(D,\tau)=\{a=x_0,\tau_1,x_1,...,x_{n-1},\tau_n,x_n=b\}\,.$$

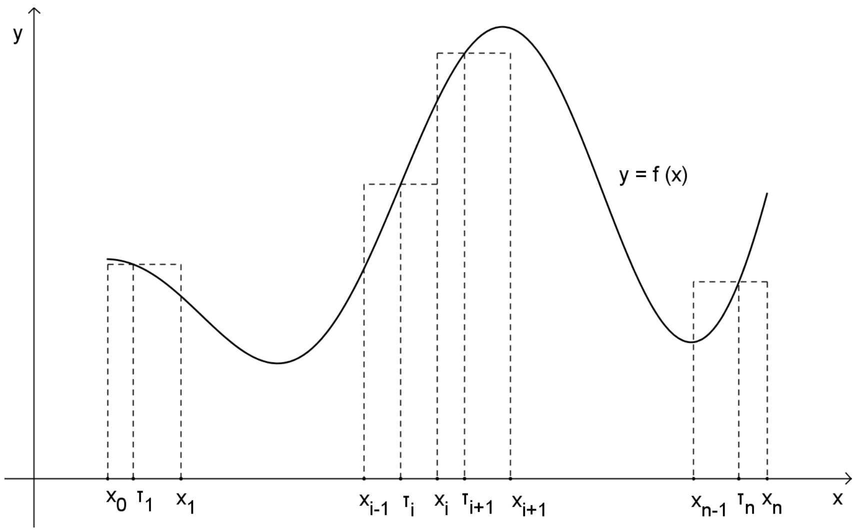
Definice 3.11. Nechť funkce f je omezená v intervalu $\langle a,b\rangle$. K dělení (D,τ) s význačnými body utvoříme integrální součet

$$\sigma(D,\tau)=\sum_{i=1}^{n}f(\tau_i)\Delta x_i\,.$$

Číslo $I\in\mathbb{R}$ nazveme Riemannovým integrálem funkce f od a do b, když ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že pro každé dělení s význačnými body (D,τ), pro které $\nu(D)<\delta$, platí nerovnost

$$|\sigma(D,\tau)-I|<\varepsilon\,.$$

Říkáme, že Riemannův integrál existuje a píšeme $I=(\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx$.



Obrázek 2: K definici Riemannova integrálu.

Obsah obrazce pod křivkou funkce nalezneme, sčítáme-li obsahy obdélníků o stranách Δx_i a $f(\tau_i)$. Čím jemnější dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, tím se integrální součet $\sigma(D, \tau)$ více přibližuje k hodnotě integrálu, tzn. $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(D, \tau) = I$. Ještě dodejme, že hodnota integrálu nezávisí na tom, jakým způsobem jsou v dělení s význačnými body dány význačné body.

Poznámka 3.12. Zřejmě platí $I = \lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i = \lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$.

Lemma 3.13. Funkce f má v $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál $I = (\mathcal{R}) \int\limits_a^b f(x)\, dx$ právě tehdy, když pro každou posloupnost dělení $D_m, m = 1, 2, \ldots$ intervalu $\langle a, b\rangle$ s význačnými body, pro niž $\lim\limits_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$, existuje vlastní limita $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma(D_m) = I$. Pak platí $I = (\mathcal{R}) \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Věta 3.14 (Bolzano-Cauchyova podmínka existence Riemannova integrálu). Funkce f má v $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál $I = (\mathcal{R}) \int\limits_a^b f(x)\, dx$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro libovolná dvě dělení D_1, D_2, pro která $\nu(D_1) < \delta$, $\nu(D_2) < \delta$ platí

$$|\sigma(D_1) - \sigma(D_2)| < \varepsilon\,.$$

Věta 3.15. Obě uvedené definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní.

Definovat Riemannův určitý integrál je trochu obtížnější než zavést Newtonův určitý integrál, protože před vyslovením samotné definice Riemannova integrálu je nutné zavést pojmy jako dělení intervalu, norma dělení, apod. Riemannova definice je cenná pro svou názornou geometrickou interpretaci, je základem některých numerických metod pro výpočet určitých integrálů. V praktických výpočtech je ale těžko použitelná. U Newtonova určitého integrálu založeného na existenci primitivní funkce názorná geometrická interpretace chybí, Newtonův integrál využíváme při praktickém výpočtu určitých integrálů . Bez znalosti primitivní funkce je výpočet určitého integrálu nutno počítat numericky.

3.3 Příklady

Začněme příkladem, který ukazuje, že ne každá funkce, která je omezená na $\langle a, b\rangle$, musí mít Riemannův integrál.

Příklad 3.16. Vypočítejme $(\mathcal{R})\int\limits_0^1 f_D(x)\,dx$, kde $f_D(x)$ je Dirichletova funkce definovaná předpisem $f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

Tato funkce je omezená a je nespojitá v každém bodě svého definičního oboru. V každém racionálním bodě nabývá svého maxima a v každém iracionálním bodě svého minima (funkce je nenakreslitelná).

Nechť $D = \{0 = x_0 \le \tau_1 \le x_1 \le \ldots \le x_{n-1} \le \tau_n \le x_n = 1\}$ je libovolné dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Zvolme body $\tau_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$ tak, aby byly iracionální (to lze vždy). Pak bude $\sigma(D, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i = 0$. Zvolíme-li body τ_i tak, aby byly racionální, bude $\sigma(D, \tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i = 1$. Takto lze postupovat pro jakékoliv dělení nezávisle na tom, jaká je jeho norma. Přestože je funkce omezená, integrál nemůže existovat, není splněna Bolzanova-Cauchyova podmínka. Pro Dirichletovu funkci tedy platí $f_D \notin \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Věta 3.17. Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak existuje $(\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (tzn. $\mathcal{C}(\langle a, b\rangle) \subset \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$).

Spojitá funkce má vždy Riemannův integrál. Větu lze zeslabit. Riemannův integrál může existovat i u omezené nespojité funkce, pokud počet bodů nespojitosti v $\langle a, b\rangle$ je konečný a v každém z těchto bodů nespojitosti existují konečné limity zprava i zleva (tzn. funkce je po částech spojitá).

Příklad 3.18. Vypočítejme $(\mathcal{R})\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, kde f je funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle,\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Funkce je na intervalu nespojitá, má jeden bod nespojitosti. Uvažujme nyní součtovou definici integrálu. Nechť D je libovolné dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Zřejmě $s(D) = 0$ pro všechna dělení D, tj. $\sup\limits_{D(\langle 0,1\rangle)} s(D) = \underline{\int\limits_0^1} f(x)\,dx = 0$, $S(D) \geq 0$ a jeho velikost je rovna délce intervalu obsahujícího bod $x = 1/2$. Konverguje-li délka tohoto intervalu k nule, je $\inf\limits_{D(\langle 0,1\rangle)} s(D) = \int\limits_0^{\bar{1}} f(x)\,dx = 0$, horní a dolní Riemannovy integrály se rovnají, Riemannův integrál funkce existuje a je roven nule (tzn. $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$).

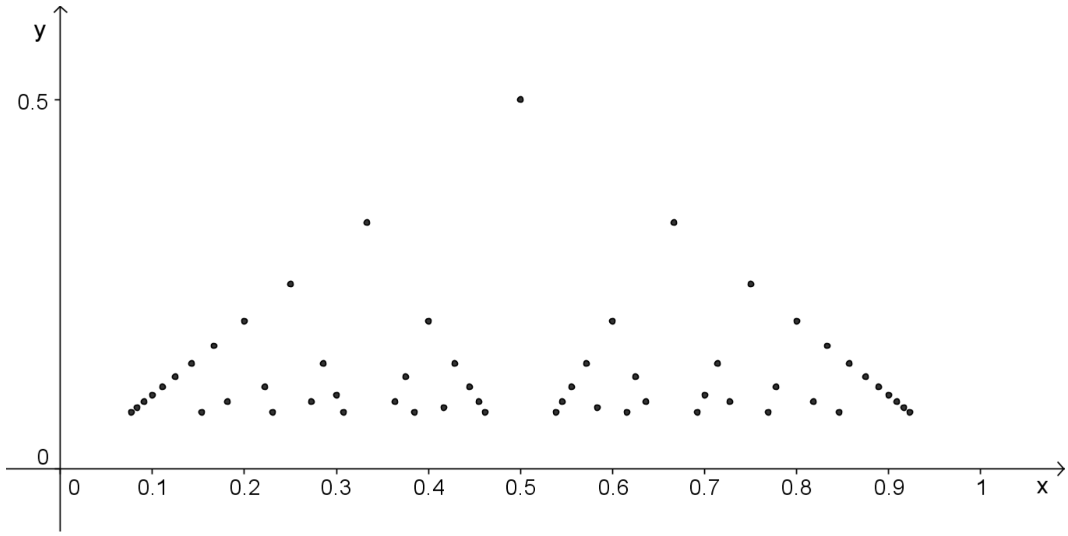
Do množiny $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ Riemannovsky integrovatelných funkcí patří dokonce i některé "velmi silně" nespojité funkce. Spojitost je postačující podmínkou existence integrálu, ne však nutnou.

Věta 3.19. Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$ a nechť N značí množinu všech bodů nespojitosti funkce f. Pak platí, že funkce f má Riemannův integrál právě tehdy, když Lebesgueova míra množiny N je rovna nule (tedy $\mu N = 0$).

Důkaz je uveden v [2].

Poznámka 3.20. Pojem Lebesgueova míra bude zaveden v kapitole 3. Podotkněme ještě, že místo "funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ s výjimkou množiny míry nula" se užívá také slovního spojení "funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ skoro všude".

Příklad 3.21. Uvažujme nyní Riemannovu funkci, která je na intervalu $\langle a, b\rangle$ dána předpisem $f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q},\ p, q \text{ nesoudělná} \end{cases}$.



Obrázek 3: Část grafu Riemannovy funkce s nejvyššími hodnotami.

Riemannova funkce je stejně jako Dirichletova funkce nenakreslitelná, vyšetřeme její hodnoty v některých bodech:

$$f_R(0) = f_R(1) = 1$$
$$f_R(1/2) = 1/2$$
$$f_R(1/4) = f_R(3/4) = 1/4$$
$$f_R(1/5) = f_R(2/5) = f_R(3/5) = f_R(4/5) = 1/5$$
$$f_R(1/6) = f_R(5/6) = 1/6$$
$$f_R(1/7) = f_R(2/7) = f_R(3/7) = f_R(4/7) = f_R(5/7) = f_R(6/7) = 1/7$$
$$atd.$$

Riemannova funkce je potrhaná ve stejných bodech jako Dirichletova funkce. Lze však dokázat, že Riemannova funkce je spojitá v iracionálních bodech a nespojitá "pouze" v racionálních bodech, tzn. je spojitá skoro všude a Riemannův integrál Riemannovy funkce existuje.

Věta 3.22. Nechť $a < b$ a nechť existuje integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Nechť funkce $g(x)$ se liší od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak existuje i integrál $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ a platí

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Definice 3.23.

a) Je-li $a < b$ a existuje-li $\int_a^b f(x)\,dx$, definujeme $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

b) Je-li f definována pro $x = a$, pak definujeme $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

Poznámka 3.24. Definice b) je smysluplná, neboť $\lim\limits_{x\to a+} \int\limits_a^x f(x)\,dx \to 0$ (pro funkci f mající Riemannův integrál na $\langle a, x\rangle$).

3.4 Vztah Riemannova a Newtonova integrálu

Pojem horního a dolního integrálního součtu a pojem primitivní funkce jsou nezávislé pojmy, přesto nazýváme číslo $\lim\limits_{x\to b-} F(x) - \lim\limits_{x\to a+} F(x)$ (resp. $F(b) - F(a)$) i číslo I z Riemannovy definice určitým integrálem. To proto, že za jistých podmínek (například pro funkce spojité) jsou si jejich příslušné číselné hodnoty rovny.

Některé funkce mají Riemannův a nemají Newtonův integrál a naopak. Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ má v intervalu $\langle 0, 1)$ Newtonův integrál, ale Riemannův integrál funkce neexistuje, neboť funkce není shora omezená. Riemannova funkce definovaná $f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q},\ p, q \text{ nesoudělná} \end{cases}$ má v $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál a nemá Newtonův integrál, protože k této funkci neexistuje v $\langle a, b\rangle$ primitivní funkce. Obecně je proto nutné odlišovat Newtonův a Riemannův integrál.

Příklad 3.25. Funkce f je dána v $\langle -1, 1\rangle$ předpisem
$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}.$$

Zjistěme, zda existuje její Riemannův a Newtonův integrál a vypočítejme jeho hodnotu. Funkce f není v $\langle -1, 1\rangle$ omezená, tedy $f \notin \mathcal{R}(\langle -1, 1\rangle)$. Primitivní funkcí F k funkci f je funkce $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$, která je spojitá v $\langle -1, 1 \rangle$, $\lim\limits_{x \to 1-} F(x) = \lim\limits_{x \to -1+} F(x) = \sin 1$. Newtonův integrál existuje, $(\mathcal{N}) \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lim\limits_{x \to 1-} F(x) - \lim\limits_{x \to -1+} F(x) = 0$.

Oba typy integrálů mají své výhody, a ačkoliv se Newtonova a Riemannova definice od sebe podstatně liší, platí, že má-li funkce Newtonův i Riemannův integrál v nějakém omezeném intervalu, jsou jejich hodnoty stejné.

Věta 3.26. Má-li $f(x)$ v $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál a v (a, b) Newtonův integrál, pak jsou si rovny, tj.

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

V případě, že integrujeme funkci spojitou v $\langle a, b \rangle$, nemusíme oba integrály odlišovat, tzn. $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \subset \mathcal{N}(\langle a, b \rangle) \cap \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$.

Následují dvě věty, které ukazují vztah mezi Riemannovým určitým integrálem a primitivní funkcí (jsou nazývány také "Základní věty integrálního počtu").

Věta 3.27. Nechť $f(x)$ je funkce spojitá v intervalu (a, b) a nechť c je libovolné číslo z intervalu (a, b). Definujme pro každé x z intervalu (a, b) funkci $F(x)$ předpisem

$$F(x) = (\mathcal{R}) \int_c^x f(t)\,dt\,, \text{ kde } f(t) \text{ je spojitá na } (a, b)\,.$$

Pak $F(x)$ je spojitou funkcí proměnné x na (a, b) a v každém bodě, v němž je $f(x)$ spojitá, má $F(x)$ derivaci, a platí

$$F'(x) = f(x)\,,$$

tedy F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b).

Věta 3.28 (Newtonova-Leibnizova formule). Nechť $a < b$ a nechť existuje integrál $(\mathcal{R}) \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Nechť $F(x)$ je spojitá v $\langle a, b \rangle$ a má v každém bodě x intervalu (a, b) derivaci $F'(x) = f(x)$. Pak je

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Riemannův integrál se skoro nikdy nepočítá podle definice, základní metodou při praktickém výpočtu Riemannova integrálu je právě Newtonova - Leibnizova formule. Podle této věty je hodnota Riemannova integrálu funkce f na $\langle a,b\rangle$ rovna přírůstku primitivní funkce $F(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ (a najít primitivní funkci bývá téměř vždy snazší než pracovat s dělením intervalu). Větu lze ještě zeslabit, stačí požadovat, aby rovnice $F'(x) = f(x)$ byla splněna ve všech bodech intervalu (a,b) s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů.

Příklad 3.29. Vypočítejme Riemannův integrál funkce
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle -1,0\rangle \\ 1+x^3 & \text{pro } x \in (0,1\rangle \end{cases}.$$

Funkce je omezená na $\langle -1,1\rangle$ a spojitá na $\langle -1,1\rangle$ kromě bodu 0. Integrál $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ vypočítáme jako součet $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx$. První integrál vypočítáme podle věty 3.28, dostaneme $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} x\,dx = [\frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}$. Na druhý integrál Newtonův vzorec použít nemůžeme, když však funkci f v bodě 0 změníme na 1 (integrál funkce se nezmění, změníme-li hodnotu funkce v konečném počtu bodů), podle Newtonova vzorce dostaneme $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} 1+x^3\,dx = [x+\frac{x^4}{4}]_{0}^{1} = 1+\frac{1}{4}$. Hodnota integrálu je rovna $\frac{3}{4}$.

V případě, že primitivní funkce k dané funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních nebo tabelovaných funkcí, lze provést přibližný výpočet numericky, například pomocí obdélníkové, lichoběžníkové nebo pomocí jiných metod. Základní myšlenka těchto metod vychází často z Riemannovy definice určitého integrálu a princip spočívá v nahrazení integrované funkce jinou vhodnou funkcí (u obdélníkové metody nahrazujeme funkci po částech konstantní funkcí, u lichoběžníkové metody po částech lineární funkcí atd.).

3.5 Vlastnosti Riemannova integrálu

Věta 3.30 (Linearita). Nechť $a < b$ a nechť existují integrály $(\mathcal{R})\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ a $(\mathcal{R})\int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx$, nechť c je libovolné číslo. Pak existují i integrály

$(\mathcal{R})\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$ a $(\mathcal{R})\int\limits_a^b cf(x)\,dx$ a platí:

$$\text{a) } (\mathcal{R})\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\text{b) } (\mathcal{R})\int_a^b cf(x)\,dx = c\,(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Větu lze rozšířit pro libovolný konečný počet funkcí.

Věta 3.31. Nechť $a < b$ a nechť existuje integrál $(\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Je-li $f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, pak

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Poznámka 3.32. Pokud aspoň v jednom bodě $c \in \langle a, b\rangle$, v němž je funkce spojitá, platí $f(c) > 0$, pak platí $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Tato vlastnost je zřejmá, neboť Riemannův integrál je vlastně obsah pod grafem funkce.

Věta 3.33 (Monotonie). Nechť $a < b$ a nechť existují integrály $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{R})\int\limits_a^b g(x)\,dx$. Pokud $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, pak

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \geq (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Poznámka 3.34. Poslední dvě věty jsou ekvivalentní.

Věta 3.35. Nechť $a<b<c$ a nechť existují integrály $(\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{R})\int\limits_b^c f(x)\,dx$. Pak existuje i $(R)\int\limits_a^c f(x)\,dx$ a platí:

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Věta 3.36. Nechť f je Riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ $(f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle))$. Pak její absolutní hodnota $|f|$ je také Riemannovsky integrovatelná funkce na $\langle a, b\rangle$ $(|f| \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle))$ a platí:

$$|(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx| \leq (\mathcal{R})\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Poznámka 3.37.

1. Riemannův integrál omezené funkce na $\langle a, b\rangle$ je absolutně konvergentní integrál, tzn. platí-li $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, pak platí $|f| \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.
2. Má-li $|f|$ v $\langle a, b\rangle$ integrál, nemusí jej mít f. Uvažujme funkci $f(x) = \begin{cases} +1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle \\ -1 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Tato funkce nemá na $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál, avšak $(\mathcal{R}) \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx = 1$.

Věta 3.38 (První věta o střední hodnotě). Nechť f, g jsou integrovatelné v $\langle a, b\rangle$ a g je v $\langle a, b\rangle$ nezáporná. Označíme-li $m = \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f$, $M = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f$, pak existuje $c \in \langle m, M\rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = c \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Je-li funkce f v $\langle a, b\rangle$ spojitá, pak existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Věta 3.39 (Druhá věta o střední hodnotě). Nechť f, g jsou integrovatelné v $\langle a, b\rangle$ a g je v $\langle a, b\rangle$ monotónní. Pak existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx\,.$$

3.6 Nevlastní integrály

Riemannův integrál mají podle definice pouze omezené spojité (nebo po částech spojité) funkce definované na omezeném intervalu. To je úzká množina funkcí. Předmětem tohoto odstavce je zobecnění Riemannova integrálu a toto zobecnění provedeme ve dvou směrech. Nejprve definujeme integrál $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, kde funkce $f(x)$ není na $\langle a, b\rangle$ omezená, poté definujeme $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$ (nebo $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\, dx$), tedy integrál z funkce na otevřeném intervalu. V prvním případě mluvíme o nevlastním integrálu vlivem funkce, ve druhém pak o nevlastním integrálu vlivem meze.

Definice 3.40. (**Nevlastní integrál vlivem funkce**). Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, t\rangle$, $a < t < b$ a nechť $f(x)$ je neomezená v levém okolí bodu b. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)\,dx = A$, říkáme, že integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konverguje a pokládáme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)\,dx = A\,.$$

Pokud limita $\lim\limits_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)\,dx$ neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že integrál diverguje.

Příklad 3.41. Vypočtěme $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$. Integrál neexistuje jako Riemannův vlastní integrál, ale existuje jako nevlastní integrál. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ není definována v bodě 1, $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \infty$, funkce není shora omezená. Uvažujme proto $\int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, $t \in (0,1)$ je parametr, $f(x)$ je v $\langle 0,t\rangle$ spojitá. Pak $\lim\limits_{t\to 1-}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{t\to 1-}(2-2\sqrt{1-t}) = 2$. Existuje vlastní limita, integrál konverguje a platí $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2$.

Poznámka 3.42. Limitu $\lim\limits_{t\to b-}\int\limits_a^t f(x)\,dx = A$ nazýváme nevlastním integrálem funkce f od a do b. Obdobně definujeme i integrál pro funkci, která není omezená v bodě a.

Definice 3.43. (**Nevlastní integrál vlivem meze**). Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a,b\rangle$, $a<b$. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = A$, říkáme, že integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje a pokládáme

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = A\,.$$

Pokud limita $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ neexistuje nebo je nevlastní, říkáme, že integrál diverguje.

Poznámka 3.44. Limitu $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = A$ nazýváme nevlastním integrálem funkce f od a do ∞. Obdobně definujeme i integrál $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Příklad 3.45. Vypočtěme $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$. Integrál není vlastní, má nevlastní mez. Uvažujme $t \in (1, \infty)$ a počítejme $\int\limits_1^{t} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$. Použitím substituce $\sqrt{x-1} = u$ je $dx = 2u\,du$ a $\int\limits_0^{\sqrt{t-1}} \frac{2u\,du}{(u^2+1)u} = 2[\arctan u]_0^{\sqrt{t-1}} = 2\arctan(\sqrt{t-1})$. Pak $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx =$ $= \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_1^{t} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \lim\limits_{t\to\infty} 2\arctan(\sqrt{t-1}) = \pi$. Limita je vlastní, integrál konverguje.

Nevlastní integrály mají stejné vlastnosti jako určitý integrál (kromě věty o střední hodnotě).

4 Lebesgueův integrál

Lebesgueův integrál je typ součtového integrálu. Pochází od Henriho Lebesguea z počátku minulého století a byl (a stále je) zásadním integrálem matematické analýzy. Hodnota Riemannova i Lebesgueova integrálu je aproximována jistými součty, tyto součty jsou tvaru $\sum_{i=1}^{n} f_i \, \mu(M_i)$, kde čísla f_i souvisí s integrovanou funkcí, množiny M_i tvoří rozklad integračního oboru a μ je funkce zobecňující délku jednoduchých geometrických útvarů v $\mathbb{R}$. Množiny M_i u Riemannova integrálu jsou intervaly, v případě Lebesgueova integrálu jsou tyto množiny složitější. Před zavedením Lebesgueova integrálu je tedy nutné nejprve popsat, přes které množiny se Lebesgueovsky integruje. Zavedeme třídu množin zvanou měřitelné množiny a na nich (pro popis pojmu délka) množinovou funkci zvanou Lebesgueovu míru, která je zobecněním pojmu délka. Pro účel této práce postačí pracovat jen s množinami v $\mathbb{R}$.

4.1 Teorie Lebesgueovy míry množin v $\mathbb{R}$

4.1.1 Měřitelné množiny

Věta 4.1. Každá neprázdná omezená otevřená množina $M \subset \mathbb{R}$ lze vyjádřit jako sjednocení konečně nebo spočetně mnoha navzájem disjunktních otevřených intervalů I_k (tzv. vytvořující intervaly).

Věta 4.2. Každá neprázdná omezená uzavřená množina $N \subset \mathbb{R}$ je buď uzavřený interval nebo lze získat z nějakého uzavřeného intervalu vyjmutím konečně nebo spočetně mnoha navzájem disjunktních otevřených intervalů I_k.

Definice 4.3. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Prvky množiny $I \in \{(a,b), (a,b\rangle, \langle a,b), \langle a,b\rangle\}$ nazveme intervaly. Množinový systém všech jednorozměrných intervalů v $\mathbb{R}$ označme I^1 . Na I^1 definujme množinovou funkci délka intervalu takto:

$$l(I) = b - a \quad I \in \{(a,b), (a,b\rangle, \langle a,b), \langle a,b\rangle\}\,.$$

Definice 4.4. Mírou intervalu $I \in \{(a,b), (a,b\rangle, \langle a,b), \langle a,b\rangle\}$ nazveme jeho délku, tj. $b - a$. Toto číslo značíme

$$\mu I = b - a \quad (\text{event. } mI, measI, \lambda I, ...)\,.$$

Poznámka 4.5. Pro $a = b$ je $\mu I = 0$, tedy míra jednobodové množiny je nula, stejně tak míra prázdné množiny je rovna nule ($\mu\emptyset = 0$). Jednobodové množiny a prázdná množina jsou někdy nazývány "zvrhlé" intervaly, mají nulovou míru. Každý neomezený interval má míru ∞.

Definice 4.6. Mírou μM neprázdné otevřené množiny $M \subset \mathbb{R}$ nazýváme součet délek všech jejích vytvořujících otevřených intervalů I_k,

$$\mu M = \sum_k \mu I_k \,.$$

Definice 4.7. Mírou μN neprázdné uzavřené množiny $N \subset \mathbb{R}$ nazýváme číslo

$$\mu N = b - a - \mu(C_N)\,,$$

kde $I = \langle a, b\rangle$ je nejmenší uzavřený interval obsahující množinu N a C_N je komplement množiny N do I, tj. $C_N = I - N$ je otevřená množina.

Věta 4.8. Míra otevřené omezené množiny M je supremum měr všech uzavřených množin, které jsou obsaženy v M.

Věta 4.9. Míra uzavřené omezené množiny N je infimum měr všech otevřených množin, které obsahují N.

Definice 4.10. Vnější mírou μ^*M neprázdné omezené množiny M nazýváme infimum měr všech otevřených omezených množin P, které obsahují množinu M,

$$\mu^* M = \inf_{M \subset P} \{\mu P\}\,, \quad P \text{... omezené otevřené množiny}\,.$$

Definice 4.11. Vnitřní mírou $\mu_* M$ omezené množiny M nazýváme supremum měr všech uzavřených omezených množin Q, které jsou obsaženy v množině M,

$$\mu_* M = \sup_{Q \subset M} \{\mu Q\}\,, \quad Q \text{... omezené uzavřené množiny}\,.$$

Věta 4.12. Je-li M otevřená omezená množina, pak $\mu^* M = \mu_* M = \mu M$. Je-li N uzavřená omezená množina, pak $\mu^* N = \mu_* N = \mu N$.

Definici míry omezených otevřených a uzavřených množin lze zobecnit na případ míry libovolné omezené množiny v $\mathbb{R}$ takto:

Definice 4.13. Omezená množina M se nazývá měřitelná v Lebesgueově smyslu, jsou-li si vnitřní a vnější míra množiny M navzájem rovny,

$$\mu^* M = \mu_* M = \mu M\,.$$

Společnou hodnotu těchto měr nazýváme (Lebesgueova) míra množiny M a značíme μM (chceme-li zdůraznit, že jde o míru v Lebesgueově smyslu, píšeme často λM). Množinu všech měřitelných množin v $\mathbb{R}$ označme $\mathfrak{M}$.

Příklad 4.14. Zjistěme, zda množina $M = \langle 0, 1)$ je měřitelná. Uvažujme nejprve otevřené množiny $P = (-\varepsilon, 1)$, kde $\varepsilon > 0$. Pro libovolné ε platí $M \subset P$ a $\mu^* P = 1+\varepsilon$. Pro $\varepsilon \to 0$ dostáváme $\inf\limits_{\varepsilon} \mu^*((-\varepsilon, 1)) = 1$. Obdobně pro vnitřní míru. Vezměme uzavřené množiny $Q = \langle 0, 1-\delta\rangle$, kde $\delta > 0$. Pro libovolné δ platí $Q \subset M$ a $\mu_* Q = 1-\delta$. Pro $\delta \to 0$ dostáváme $\sup\limits_{\delta} \mu_*(\langle 0, 1-\delta\rangle) = 1$. Vnější a vnitřní míra jsou si tedy rovny, množina $M = \langle 0, 1)$ je měřitelná.

Poznámka 4.15.

1. Míra neprázdné měřitelné množiny M je nezáporné číslo, míra prázdné množiny je nula ($\mu M \geqq 0 \;\; \forall\, M \in \mathfrak{M}, \;\; \mu\emptyset = 0$).
2. Pro libovolnou spočetnou posloupnost po dvou disjunktních měřitelných množin $M_0, M_1, M_2, ...$ platí $\mu(\bigcup\limits_i M_i) = \sum\limits_i \mu M_i$ (σ-aditivita míry μ).

Věta 4.16.

1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je omezená množina, která je sjednocením spočetného počtu měřitelných množin. Pak M je měřitelná.
2. Průnik spočetné množiny měřitelných množin je měřitelná množina.
3. Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.
4. Nechť M_1, M_2 jsou dvě měřitelné množiny, $M_2 \subset M_1$, $\mu M_2 < \infty$. Pak pro jejich rozdíl $M = M_1 \setminus M_2$ platí: $\mu M = \mu M_1 - \mu M_2$.

Důležitou úlohu mají množiny míry nula.

Definice 4.17. Množina M má nulovou míru právě tehdy, když ke každému ε kladnému existuje spočetný systém otevřených intervalů $\{I_j,\ j = 1, 2, ...\}$ takových, že $M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$ a platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \varepsilon \,.$$

Pojem množina s nulovou mírou vyjadřuje skutečnost, že tato množina je v jistém smyslu malá nebo zanedbatelná. Množiny nulové míry jsou například množina složená z konečného počtu bodů, množina všech racionálních čísel, každá spočetná množina. Množiny míry nula dávají měřitelným množinám velkou rozmanitost. Pokud z měřitelné množiny odebereme množinu míry nula, dostáváme opět měřitelnou množinu. Lebesgueův integrál z libovolné funkce přes množinu míry nula je rovný nule, a lze proto tyto množiny k integračnímu oboru přidávat nebo odebírat, aniž by se změnila hodnota integrálu.

Poznámka 4.18.

1. Užijeme-li výraz "skoro všude na množině M", znamená to, že nějaká skutečnost (nebo vlastnost) platí pro všechny body množiny M s výjimkou bodů $x \in M_0 \subset M$, kde $\mu M_0 = 0$ (tzn. s výjimkou množiny bodů nulové míry).
2. Lze dokázat existence neměřitelné množiny v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, není ale dosud znám postup, jak takovou množinu konstruktivně nalézt. (Nekonstruktivní důkaz využívá axiom výběru teorie množin.)

4.2 Měřitelné funkce

Definice 4.19. Nechť je dána funkce f na omezené měřitelné množině M skoro všude. Řekneme, že funkce f je měřitelná, jestliže pro libovolné $C \in \mathbb{R}$ je měřitelná množina $\{x \in M : f(x) > C\}$.

Poznámka 4.20. Ekvivalentně lze požadovat, aby množiny $\{x \in M : f(x) < C\}$, $\{x \in M : f(x) \geq C\}$, $\{x \in M : f(x) \leq C\}$ byly měřitelné.

4.2.1 Vlastnosti měřitelných funkcí

1. Každá funkce spojitá nebo po částech spojitá v $\langle a, b\rangle$ je na tomto intervalu měřitelná.
2. Jsou-li funkce f, g měřitelné na M, pak jsou na této množině měřitelné i funkce αf, $f+g$, fg, $|f|$, $\max(f,g)$, $min(f,g)$, f^2, $\frac{f}{g}$ pro $g \neq 0$.
3. Každá funkce definovaná na množině míry nula je měřitelná.
4. Je-li na množině M dána posloupnost měřitelných funkcí $\{f_n(x)\}$ a funkce $f(x)$ taková, že platí vztah $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ skoro všude na množině M, pak je funkce $f(x)$ měřitelná.
5. Je-li $\varphi : M \to G$ měřitelná v M a $f : G \to E_1$ měřitelná v G, pak $\varphi \circ f$ je měřitelná.
6. Dvě funkce f, g dané na měřitelné množině M nazveme ekvivalentní, jsou-li si rovny skoro všude (značíme $f \approx g$). Je-li f měřitelná na M a je-li $f \approx g$, pak g je měřitelná na M.
7. Je-li f měřitelná na M, pak pro libovolné C jsou měřitelné také množiny $\{x \in M : f(x) < C\}$, $\{x \in M : f(x) \geq C\}$, $\{x \in M : f(x) = C\}$.

4.3 Definice Lebesgueova integrálu

Definice 4.21. Nechť na omezené měřitelné množině $E \subseteq \langle a, b\rangle$ je dána omezená měřitelná funkce $f(x)$, přičemž platí $A < f(x) < B \quad \forall x \in E$. Množinu reálných čísel $y_0, y_1, ..., y_n$ nazveme dělením d intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže $A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B$. Každému polouzavřenému intervalu $\langle y_k, y_{k+1})$ přiřaďme množinu E_k takovou, že $E_k = \{x \in E : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$, $k = 1, ..., n$ a nazvěme ji Lebesgueova množina a μE_k její Lebesgueova míra.

Poznámka 4.22. Lebesgueovy množiny E_k mají následující vlastnosti:

a) $E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j)$, tzn. množiny E_k jsou navzájem disjunktní

b) množiny E_k jsou měřitelné

c) $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$

d) $\mu E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mu E_k$

Definice 4.23. Nechť je dána omezená měřitelná funkce $f(x)$ na omezené měřitelné množině E. Nechť d je dělení intervalu $\langle A, B\rangle$ a E_k Lebesgueovy množiny příslušné tomuto dělení . Definujme

$$S_L(d) = \sum_{k=1}^{n} y_k \, \mu E_k$$

jako horní Lebesgueův součet funkce f příslušný dělení d a číslo

$$s_L(d) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \, \mu E_k$$

jako dolní Lebesgueův součet funkce f příslušný dělení d.

Lemma 4.24. Pro libovolná dvě dělení d_1, d_2 intervalu $\langle A, B\rangle$ vždy platí, že $s_L(d_1) \leq S_L(d_2)$ (tzn. žádný dolní Lebesgueův součet není větší než libovolný horní Lebesgueův součet).

Z předchozího lemmatu plyne: je-li $S_L^{'}$ nějaký (libovolný) horní Lebesgueův součet, pak každý dolní součet je menší než tento horní součet, tj $s_L(d) \leq S_L^{'}$, množina dolních součtů je shora omezená, tedy existuje supremum množiny všech dolních součtů $\sup\limits_{d(\langle A,B\rangle)} s_L(d)$. Obdobně lze ukázat, že existuje infimum množiny všech horních součtů $\inf\limits_{d(\langle A,B\rangle)} S_L(d)$.

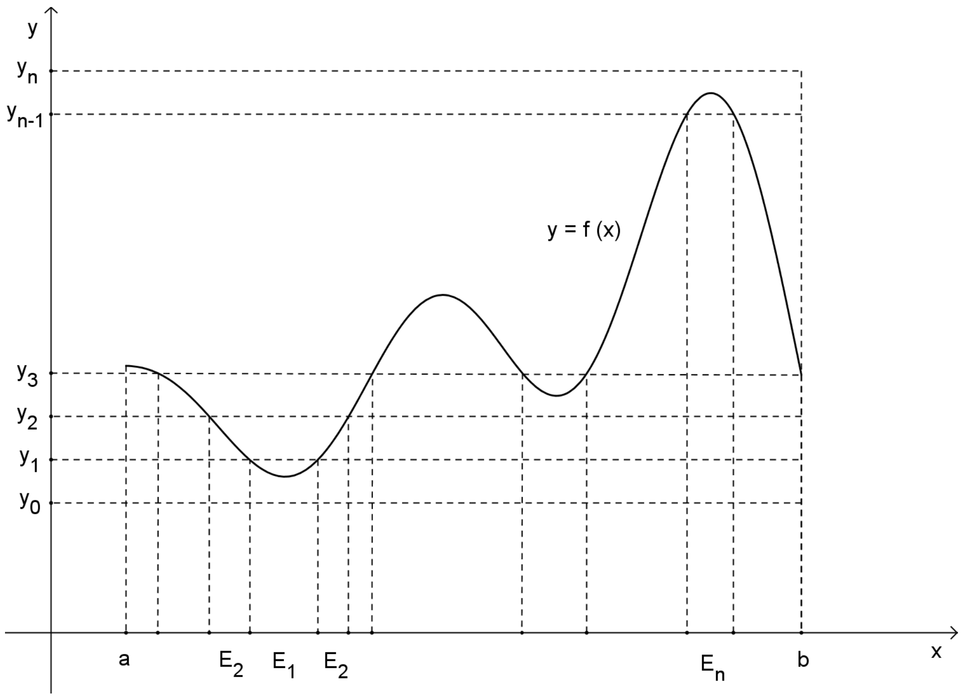
Věta 4.25. Nechť funkce $f(x)$ je omezená měřitelná funkce na omezené měřitelné množině $E \subseteq \langle a, b\rangle$. Pak infimum $\inf\limits_{d(\langle A,B\rangle)} S_L(d)$ množiny všech horních Lebesgueových součtů (získaných při všech děleních d intervalu $\langle A, B\rangle$) je rovno supremu $\sup\limits_{d(\langle A,B\rangle)} s_L(d)$ množiny všech dolních Lebesgueových součtů (získaných při všech děleních d intervalu $\langle A, B\rangle$), tj.

$$\inf_{d(\langle A,B\rangle)} S_L(d) = \sup_{d(\langle A,B\rangle)} s_L(d) \,.$$

Definice 4.26. Společnou hodnotu $\inf\limits_{d(\langle A,B\rangle)} S_L(d) = \sup\limits_{d(\langle A,B\rangle)} s_L(d)$ nazýváme Lebesgueovým integrálem omezené měřitelné funkce $f(x)$ na omezené měřitelné množině E a značíme

$$\int_E f(x)\,dx \text{ nebo } (\mathcal{L})\int_E f(x)\,dx \text{ nebo } (\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx \text{ v případě, že } E = \langle a, b\rangle \,.$$

Existuje-li konečný Lebesgueův integrál funkce $f(x)$ v E, pak o funkci $f(x)$ říkáme, že je integrovatelná v Lebesgueově smyslu. Množinu všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí přes $E = \langle a, b\rangle$ značíme $\mathcal{L}(E)$ nebo $\mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$.



Obrázek 4: K definici Lebesgueova integrálu.

Věta 4.27. Má-li $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál, pak zde má i Lebesgueův integrál a oba integrály jsou si rovny, tj.

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Obrácená věta neplatí. Funkce, která má Lebesgueův integrál, nemusí mít Riemannův integrál. $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle) \subset \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ (viz následující příklad).

Příklad 4.28. Vypočítejme $(\mathcal{L}) \int_0^1 f_D(x)\,dx$, kde $f_D(x)$ je Dirichletova funkce. Označme na $\langle 0, 1\rangle$ množinu všech racionálních čísel $E_{\mathbb{Q}}$ a množinu všech iracionálních čísel $E_{\mathbb{I}}$. Poznamenejme, že množina $E_{\mathbb{Q}}$ je spočetná množina (existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou $E_{\mathbb{Q}}$ a množinou přirozených čísel $\mathbb{N}$), její míra je proto nula, $\mu E_{\mathbb{Q}} = 0$, míra množiny $E_{\mathbb{I}}$ je rovna jedné, neboť $\mu E_{\mathbb{I}} = \mu(\langle 0, 1\rangle - E_{\mathbb{Q}}) =$

$\mu\langle 0,1\rangle - \mu E_{\mathbb{Q}} = 1 - 0 = 1$. Zvolme libovolné dělení d intervalu $\langle 0,1\rangle$. Zjemňujeme-li toto dělení, dospějeme k $\inf\limits_{d(\langle 0,1\rangle)} S_L(d) = \sup\limits_{d(\langle 0,1\rangle)} s_L(d) = 1 \cdot \mu E_{\mathbb{Q}} + 0 \cdot \mu E_{\mathbb{I}} = 0$, Lebesgueův integrál existuje a je roven nule. Jak již bylo ukázáno, Riemannův integrál Dirichletovy funkce neexistuje.

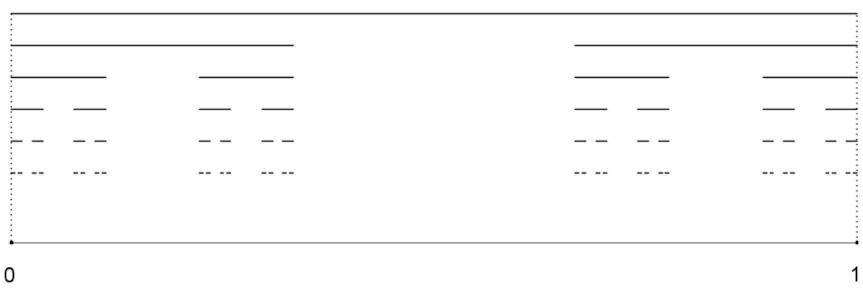
Před dalšími příklady je zavedeme pojem charakteristická funkce:

Definice 4.29. Nechť $M \subset E = \langle a,b\rangle$. Pak funkce $\chi_M : E \to \{0,1\}$, pro kterou platí $\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in M \\ 0 & \text{pokud } x \notin M \end{cases}$, se nazývá charakteristická funkce množiny M v množině E.

V následujících dvou příkladech budou ukázána zajímavá diskontinua.

Příklad 4.30. Zjistěme Lebesgueův integrál charakteristické funkce Cantorova diskontinua.

Cantorovo diskontinuum je množina, která vznikne, když z uzavřeného intervalu odstraníme spočetně mnoho otevřených intervalů. Uvažujme následující nekonečný proces. Z intervalu $C_1 = \langle 0,1\rangle$ vyjmeme otevřený interval $E_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (první krok), zůstanou dva uzavřené intervaly $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, $\langle \frac{2}{3}, 1\rangle$, jejich sjednocení označme C_2. Z C_2 vyjmeme intervaly $E_{21} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $E_{22} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ (druhý krok), zbylou uzavřenou množinu označme C_3.



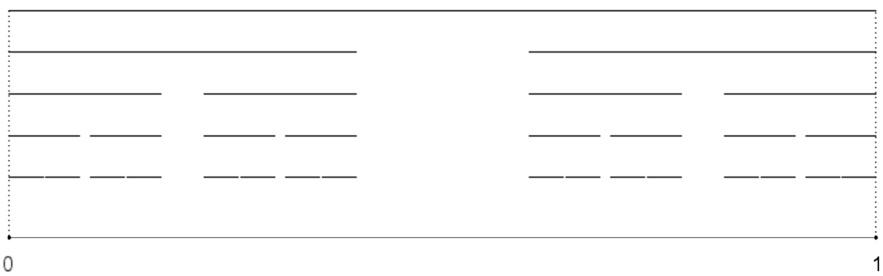
Obrázek 5: Konstrukce Cantorova diskontinua.

Dále postupujeme stejným způsobem, ze středu uzavřených intervalů vyjímáme otevřené intervaly, jejichž délka je rovna třetině původního intervalu, tedy ve třetím kroku vyjmeme z C_3 interval $E_{3j}, (1 \le j \le 4)$, až v k-tém kroku z C_k vyjmeme 2^{k-1}

intervalů, které tvoří množinu $E_k = \bigcup\limits_{j=1}^{2^{k-1}} E_{kj}$. Sjednocení spočetně mnoha otevřených množin (intervalů) je otevřená množina $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Cantorovo diskontinuum se nazývá komplement $P = \langle 0, 1\rangle \setminus E$ množiny E do $\langle 0, 1\rangle$ a je to uzavřená množina. Lebesgueova míra množiny E_k je $\mu E_k = \frac{2^{k-1}}{3^k}$, Lebesgueova míra množiny E je $\mu E = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... = \frac{1}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$ a míra Cantorova diskontinua P je $\mu P = 1 - \mu E = 0$ (zde nastává paradox, protože P je množina nespočetná (má dokonce mohutnost kontinua), avšak $\mu P = 0$). Nyní charakteristickou funkci Cantorova diskontinua označme $\chi_P(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in E \\ 1 & \text{pokud } x \in P \end{cases}$. Lebesgueův integrál charakteristické funkce Cantorova diskontinua je $(\mathcal{L}) \int\limits_0^1 \chi_P(x)\, dx = 0$. Lze dokázat, že množina P je množina bodů nespojitosti funkce χ_P. Množina P je míry nula a platí $\chi_P \in \mathcal{R}(\langle 0, 1\rangle)$, $(\mathcal{R}) \int\limits_0^1 \chi_P(x)\, dx = 0$ (dle [2, věta 161, str. 447]).

Příklad 4.31. Zjistěme Lebesgueův integrál charakteristické funkce ε-diskontinua.

ε-diskontinuum je množina (označme ji $K(\varepsilon)$), která vznikne podobným nekonečným procesem jako Cantorovo diskontinuum.



Obrázek 6: Konstrukce ε-diskontinua.

Nechť je dán uzavřený interval $I_1 = \langle 0, 1\rangle$. Zvolme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4}\rangle$ libovolně pevně. Ze středu uzavřeného intervalu $I_1 = \langle 0, 1\rangle$ vyjmeme množinu (otevřený interval) K_1, jejíž míra je ε (1. krok), zůstanou dva uzavřené intervaly $\langle 0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\rangle$, $\langle \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, 1\rangle$, jejich sjednocení označme I_2. Z intervalu I_2 vyjmeme množinu $K_2 = K_{21} \cup K_{22}$, jejichž míra je $\mu K_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ (2. krok), zůstanou 4 uzavřené intervaly (jejich sjednocení označme I_3), míra každého je $\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8}$. Ve třetím kroku z I_3 vyjmeme množinu $K_3 =$

$= K_{31} \cup K_{32} \cup K_{33} \cup K_{34}$, která má míru $\mu K_3 = \frac{\varepsilon}{4}$. Zbyde 8 uzavřených intervalů, míra každého je $\frac{1}{8} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{16} - \frac{\varepsilon}{32}$. V n-tém kroku z I_n, kterou tvoří 2^{n-1}intervalů, vyjmeme množinu $K_n = \bigcup\limits_{i=1}^{2^{n-1}} K_{ni}$, míra každého intervalu $K_{ni} (i = 1, 2, ..., 2^{n-1})$ je $\frac{\varepsilon}{4^{n-1}}$ a $\mu K_n = 2^{n-1} \frac{\varepsilon}{4^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$. Sjednocení spočetně mnoha otevřených množin (intervalů) je otevřená množina $K(\varepsilon) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, jejíž míra je $\mu K(\varepsilon) = \varepsilon(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ...) =$ $= \varepsilon \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n-1} = \varepsilon \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\varepsilon$. Doplněk množiny $K(\varepsilon)$ do $\langle 0, 1\rangle$ je uzavřená množina $S(\varepsilon) = \langle 0, 1\rangle - K(\varepsilon)$ nazývaná ε-diskontinuum, Lebesgueova míra této množiny je $\mu S(\varepsilon) = 1 - \mu K(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon$. Označme $\chi_{S(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in K(\varepsilon) \\ 1 & \text{pokud } x \in S(\varepsilon) \end{cases}$ charakteristickou funkci ε-diskontinua. Množina $S(\varepsilon)$ je množina bodů nespojitosti funkce $\chi_{S(\varepsilon)}$, míra této množiny je $\mu S(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon \neq 0$. Funkce $\chi_{S(\varepsilon)}$ je lebesgueovsky integrovatelná a platí $\int\limits_0^1 \chi_{S(\varepsilon)}(x) = \mu S(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon$, funkce $\chi_{S(\varepsilon)}$ ale není integrovatelná v Riemannově smyslu, neboť množina bodů nespojitosti má míru větší než nula (podle [2, věta 161, str. 447] má omezená funkce Riemannův integrál, když je skoro všude spojitá, tzn. množina bodů nespojitosti má míru nula).

Lebesgueův integrál je obecnější než Riemannův integrál nejen z hlediska velikosti množiny integrovatelných funkcí, jak bude ukázáno v kapitole 7. V teorii Lebesgueova integrálu platí důležité věty o limitních přechodech, například věta 4.41 o majorizovaném limitním přechodu, které pro Riemannův integrál obecně neplatí. Uvažujme funkci $\chi_{K(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in K(\varepsilon) \\ 0 & \text{pokud } x \in S(\varepsilon) \end{cases}$ ("obrácená" funkce k charakteristické funkci ε-diskontinua). V Lebesgueově teorii lze pro výpočet integrálu $\int\limits_0^1 \chi_{(K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n)}(x)\, dx$ použít záměnu limity a integrálu podle věty 4.41, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \chi_{(K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n)}(x)\, dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} \chi_{(K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n)}(x)\, dx =$ $\int\limits_0^1 \chi_{K(\varepsilon)}(x)\, dx = 2\varepsilon$. V Riemannově smyslu lze výpočet provést pouze následovně: $\int\limits_0^1 \chi_{(K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n)}(x) dx = \varepsilon(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n})$. Záměna limity a integrálu posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ je u Riemannova integrálu možná například v případě, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje na intervalu I k funkci f stejnoměrně, a to zde není splněno.

4.4 Vlastnosti Lebesgueova integrálu

Věta 4.32. Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou integrovatelné na měřitelné množině E . Pak je na E integrovatelná i funkce $h(x) = f(x) + g(x)$ a platí

$$\int_E h(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx\,.$$

Věta 4.33. Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na množině E a nechť k je konstanta. Pak na E je integrovatelná i funkce $kf(x)$ a platí

$$\int_E kf(x)\,dx = k\int_E f(x)\,dx\,.$$

Věta 4.34. Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou integrovatelné na množině E a nechť $f \leq g$. Pak

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_E g(x)\,dx\,.$$

Věta 4.35. (**Věta o střední hodnotě**). Nechť pro měřitelnou funkci $f(x)$ definovanou na měřitelné množině E platí $A \leq f(x) \leq B$. Pak platí

$$A\cdot\mu E \leq \int_E f(x)\,dx \leq B\cdot\mu E\,.$$

Důsledek 4.36. Je-li $\mu E = 0$, pak $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$.

Věta 4.37. (**Aditivnost integrálu**). Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na měřitelné množině E. Pokud E je sjednocením konečně nebo spočetně mnoha navzájem disjunktních měřitelných množin E_k, tj. $E = \bigcup\limits_k E_k$ $(E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j)$, pak

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,dx\,.$$

Důsledek 4.38. Jsou-li funkce f, g ekvivalentní, pak $\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E g(x)\,dx$.

Poznámka 4.39. Je-li $f = 0$ skoro všude v E, pak $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$.

Věta 4.40. Nechť f je měřitelná v $E = \langle a, b\rangle$. Pak platí, že pokud $f \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$, pak je i $|f| \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ a platí nerovnost

$$|\int_E f\, d\mu| \leq \int_E |f|\, d\mu.$$

Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní.

Věta 4.41. Nechť je dána posloupnost měřitelných omezených funkcí $\{f_n(x)\}$ definovaných na měřitelné množině E a nechť tato posloupnost konverguje k funkci $f(x)$ skoro všude, tedy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E - E_0\,,\ \mu E_0 = 0\,.$$

Nechť dále existuje integrovatelná funkce $\varphi(x)$ taková, že $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ $\forall x \forall n$. Pak je možný limitní přechod za znakem integrálu a platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = f(x)\,.$$

Funkce $\varphi(x)$ se nazývá integrovatelná majoranta posloupnosti $\{f_n(x)\}$.

Lebesgueův integrál lze rozšířit i na neomezené funkce.

Věta 4.42. Nechť funkce $f(x)$ je měřitelná a nezáporná na měřitelné množině E, nechť $n_0 \in \mathbb{N}$. Pak funkce

$$|f(x)|_{n_0} = \begin{cases} f(x) & \text{je-li } f(x) \leq n_0 \\ n_0 & \text{je-li } f(x) > n_0 \end{cases}$$

je také měřitelná.

Definice 4.43. Limitu

$$\lim_{n_0\to\infty} \int_E |f(x)|_{n_0}\, dx$$

nazýváme Lebesgueovým integrálem funkce $f(x)$ na množině E, značíme

$$\int_E f(x)\, dx \quad \text{nebo} \quad (\mathcal{L}) \int_E f(x)\, dx\,.$$

Uvedená definice přiřazuje integrál každé měřitelné nezáporné funkci (integrovatelné však nazýváme jen ty, jejichž integrál je konečný). Pro omezenou funkci f a dostatečně velké n_0 bude $|f(x)|_{n_0} \equiv f(x)$, tzn. tato definice splývá s předchozí. Každá omezená měřitelná funkce je proto integrovatelná.

4.5 Absolutně spojité funkce

Definice 4.44. Nechť f je funkce definovaná na $\langle a,b\rangle$ a nechť $D=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ je dělení $\langle a,b\rangle$. Označme

$$v(f,D)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\,.$$

Pak číslo

$$\operatorname{var}_a^b f=\sup_D\, v(f,D)$$

nazveme variací funkce f v intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li $\operatorname{var}_a^b f<\infty$, nazýváme f funkce s konečnou variací na $\langle a,b\rangle$.

Věta 4.45.

1. Funkce f je funkce s konečnou variací právě tehdy, když lze vyjádřit jako rozdíl dvou neklesajících funkcí, tzn. když existují neklesající funkce f_1,f_2 takové, že $f=f_1-f_2$.
2. Má-li f konečnou variaci na $\langle a,b\rangle$, pak je f v $\langle a,b\rangle$ omezená.

Věta 4.46. Nechť funkce f je omezená a neklesající v intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak f má skoro všude v $\langle a,b\rangle$ konečnou derivaci.

Protože každá funkce, která má v $\langle a,b\rangle$ konečnou variaci, je v tomto intervalu rozdílem dvou neklesajících funkcí, z předchozí věty vyplývá:

Věta 4.47. Nechť funkce f má v $\langle a,b\rangle$ konečnou variaci. Pak f má skoro všude v $\langle a,b\rangle$ konečnou derivaci.

Definice 4.48. Nechť na $\langle a,b\rangle$ je dána funkce f. Funkce f je absolutně spojitá v $\langle a,b\rangle$, právě když ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\eta>0$ takové, že pro každé intervaly $\langle u_i,v_i\rangle$, $i=1,2,...,n$, $a\le u_1\le v_1\le...\le u_n\le v_n\le b$, pro něž $\sum\limits_{i=1}^{n}(v_i-u_i)<\eta$, platí

$$\sum_{i=1}^{n}|f(v_i)-f(u_i)|<\varepsilon.$$

Množinu všech funkcí f absolutně spojitých v $\langle a,b\rangle$ značíme $\mathcal{AC}(\langle a,b\rangle)$.

Věta 4.49.

1. Je-li $f \in \mathcal{AC}(\langle a, b\rangle)$, pak f má konečnou variaci.
2. Je-li $f \in \mathcal{AC}(\langle a, b\rangle)$, pak pro skoro každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje vlastní derivace $f'(x)$.

Problematice vztahu absolutně spojitých funkcí a Lebesgueova integrálu je věnována následující podkapitola.

4.6 Neurčitý Lebesgueův integrál

Lebesgueův integrál není obecně způsobilý rekonstruovat funkci na základě znalosti její derivace, tzn. obecně neplatí Newtonův vztah $F(b) - F(a) = (\mathcal{L}) \int_a^b F'(x)\, dx$, ani když derivace F' existuje všude v $\langle a, b\rangle$. To je nedostatek Lebesgueova integrálu.

Definice 4.50. Každou funkci

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx + C\,,$$

kde $t \in \langle a, b\rangle$, $C \in \mathbb{R}$ je konstanta a $f \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$, nazýváme neurčitý Lebesgueův integrál funkce f v $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 4.51.

1. Integrál $F(t) = \int_a^t f(x)\, dx + C$ pro $t \in \langle a, b\rangle$ bývá nazýván také integrálem s proměnnou horní mezí. Pro integrál z předchozí definice se přidržím pojmenování neurčitý Lebesgueův integrál, které se používá v [2], [3], [9] . Poznamenejme ještě, že tento integrál není určitým integrálem, jde o funkci proměnné t.
2. Pokud $\int_a^b f(x)dx$ konverguje v $\langle a, b\rangle$, pak $\forall t \in \langle a, b\rangle$ konverguje i $\int_a^t f(x)\, dx$.
3. Je-li F neurčitým integrálem funkce f v $\langle a, b\rangle$, pak postupným dosazením $t = a$, $t = b$ a odečtením dostaneme $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Věta 4.52. Nechť funkce F je omezená a neklesající v $\langle a, b\rangle$. Pak v $\langle a, b\rangle$ platí

$$0 \leq \int_a^b F'(x)\, dx \leq F(b) - F(a)\,,$$

tedy $F' \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$.

Protože každá funkce s konečnou variací lze zapsat jako rozdíl dvou neklesajících konečných funkcí, platí následující věta:

Věta 4.53. Má-li funkce F v $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci (speciálně je-li funkce absolutně spojitá), pak $F' \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$.

Věta 4.54. Nechť funkce F je neurčitým (Lebesgueovým) integrálem v $\langle a, b\rangle$. Pak F je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$.

Věta 4.55. Nechť $f \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$. Položme $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$. Pak platí $F'(x) = f(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$.

Věta 4.56. Každá funkce F absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ je v tomto intervalu neurčitým integrálem své derivace.

Předchozí lze shrnout následovně: K tomu, aby funkce F byla v $\langle a, b\rangle$ neurčitým integrálem funkce f, nestačí splnění podmínky $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Funkce F je neurčitým integrálem v $\langle a, b\rangle$, když F je v $\langle a, b\rangle$ absolutně spojitá. Pro dané dvě funkce f, F platí, že F je neurčitým integrálem funkce f v $\langle a, b\rangle$, když F je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ a zároveň platí $F'(x) = f(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. A nakonec, pro funkci f platí, že $f \in \mathcal{L}(\langle a, b\rangle)$ právě když f je skoro všude v $\langle a, b\rangle$ rovna derivaci jisté funkce, která je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$.

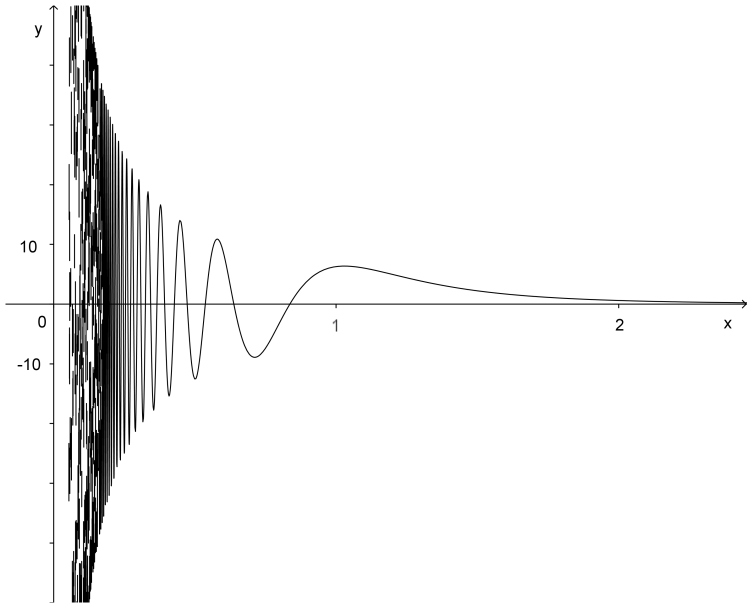
Příklad 4.57. Uvažujme funkci $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{\pi}{x^2} & \text{pro } x \in (0, 1\rangle \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$. Zjistěme, zda funkce $F' \in \mathcal{L}(\langle 0, 1\rangle)$. Derivace F' je $F'(x) = -\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} + 2x\sin\frac{\pi}{x^2}$ pro $x \in (0, 1\rangle$, $F'(0) = 0$. Funkce F není v $\langle 0, 1\rangle$ absolutně spojitá (lze ověřit), a proto nemůže být F' v $\langle 0, 1\rangle$ integrovatelná v Lebesgueově smyslu.

Poznámka 4.58.

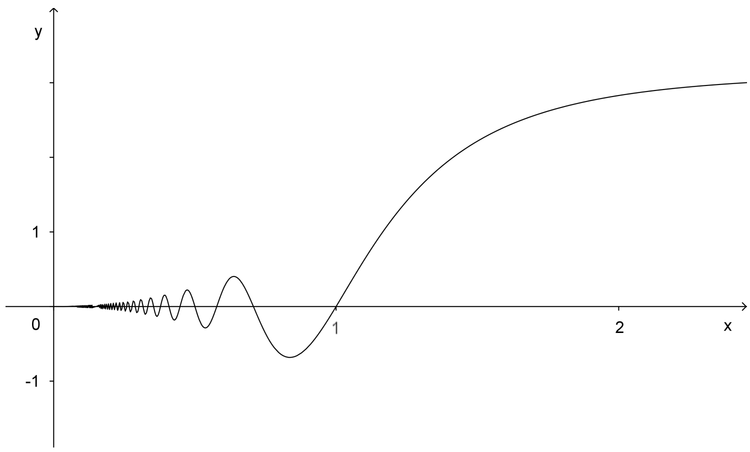
1. Označíme-li v předchozím příkladu $f(x) = -\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$ a $g(x) = 2x\sin\frac{\pi}{x^2}$, pak funkce $g(x) \in \mathcal{L}(\langle 0, 1\rangle)$, ale $f(x) \notin \mathcal{L}(\langle 0, 1\rangle)$, neboť integrál $\int\limits_0^1 |f(x)|\,dx = \infty$, a tudíž integrál $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ neexistuje.

2. Funkce F' z příkladu 4.57 má v $\langle 0,1\rangle$ Newtonův integrál $(\mathcal{N})\int\limits_0^1 F'(x)\,dx =$ $= F(1) - F(0) = 0$. Platí $F' \notin \mathcal{L}(\langle 0,1\rangle) \wedge F' \in \mathcal{N}(\langle 0,1\rangle)$.

Tento příklad ukazuje funkci, která nemá Lebesgueův (a tedy ani Riemannův) integrál. Lebesgueův integrál zahrnuje Riemannův integrál, ale ne Newtonův integrál.



Obrázek 7: Graf funkce $F'(x) = -\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} + 2x\sin\frac{\pi}{x^2}$.



Obrázek 8: Graf funkce $F(x) = x^2\sin\frac{\pi}{x^2}$.

5 Perronův integrál

5.1 Definice Perronova integrálu

Definice uvedená níže pochází z roku 1914 od německého matematika Oskara Perrona (1880 - 1975). Shrňme dosavadní. Je-li F primitivní funkcí k funkci f v $\langle a, b\rangle$, Newtonův integrál je definován $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, přičemž pravá strana nezávisí na tom, kterou primitivní funkci vezmeme. Je-li f konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$, je její Riemannův integrál $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ primitivní funkcí k funkci f v $\langle a, b\rangle$, a tedy podle Newtonova vztahu $F(b) - F(a) = (\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a tutéž hodnotu má i Lebesgueův integrál. U nespojitých funkcí se však tyto pojmy liší. Perronova definice byla dalším zobecněním pojmu integrál, tento integrál zahrnuje Newtonův a Lebesgueův (a pak i Riemannův) integrál. Oskar Perron přitom vyšel podobně jako Newton z pojmu primitivní funkce. Nemá-li funkce f v $\langle a, b\rangle$ primitivní funkci, vyšetřuje Perron majoranty M a minoranty m funkce f a rozdíly $M(b) - M(a)$, $m(b) - m(a)$ bere jako horní a dolní odhad hledaného integrálu. Požadavek existence derivací M', m' nahrazuje ještě horními a dolními derivacemi.

Definice 5.1. Nechť funkce g je dána v $\langle a, b\rangle$ a $x \in \langle a, b\rangle$. Definujme vztahem

$$\overline{D}g(x) = \limsup_{\substack{h\to 0\\ x+h\in\langle a,b\rangle}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

horní derivaci funkce g v bodě $x \in \langle a, b\rangle$ a vztahem

$$\underline{D}g(x) = \liminf_{\substack{h\to 0\\ x+h\in\langle a,b\rangle}} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

dolní derivaci funkce g v bodě $x \in \langle a, b\rangle$.

Podle definice zřejmě pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $\underline{D}g(x) \leq \overline{D}g(x)$ a když má funkce g v bodě $x \in \langle a, b\rangle$ derivaci $g'(x)$, pak $g'(x) = \overline{D}g(x) = \underline{D}g(x)$.

Lemma 5.2. Nechť g je definována na $\langle a, b\rangle$. Je-li $\underline{D}g(x) \geq 0\ \forall x \in \langle a, b\rangle$, pak funkce g je neklesající v $\langle a, b\rangle$.

Definice 5.3. Nechť f, M jsou dvě funkce na $\langle a, b\rangle$. Funkci M nazveme majorantou k funkci f, když pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$\underline{D}M(x) \geq f(x)\,.$$

Funkci m nazveme minorantou k funkci f, když pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$\overline{D}m(x) \leq f(x)\,.$$

Lemma 5.4. Nechť M je majoranta a m minoranta k funkci f v $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $M - m$ je neklesající, tedy pro každé $c, d \in \langle a, b\rangle$, $c \leq d$ platí

$$M(d) - m(d) \geq M(c) - m(c)\,,$$

nebo

$$M(d) - M(c) \geq m(d) - m(c)\,.$$

Poznámka 5.5. Speciálně pro každou majorantu M a každou minorantu m je $m(b) - m(a) \leq M(b) - M(a)$.

Definice 5.6. Jestliže k dané funkci f v $\langle a, b\rangle$ existuje alespoň jedna majoranta i minoranta a jestliže

$$\inf_M \,(M(b) - M(a)) = \sup_m \,(m(b) - m(a)) = I,$$

kde infimum bereme přes všechny majoranty a supremum přes všechny minoranty k funkci f, řekneme, že funkce f má Perronův integrál $(\mathcal{P}) \int\limits_a^b f(x)\,dx$ od a do b a klademe

$$I = (\mathcal{P}) \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Množinu všech funkcí, které mají Perronův integrál v $\langle a, b\rangle$, označme $\mathcal{P}(\langle a, b\rangle)$.

Věta 5.7. Pro danou funkci f existuje v $\langle a, b\rangle$ Perronův integrál $(\mathcal{P}) \int\limits_a^b f(x)\,dx$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k funkci f v $\langle a, b\rangle$ majoranta M a minoranta m tak, že platí

$$M(b) - M(a) - (m(b) - m(a)) \leq \varepsilon\,.$$

5.2 Vlastnosti Perronova integrálu

Věta 5.8. Nechť funkce f, g mají v $\langle a,b\rangle$, $a<b$ Perronův integrál $(\mathcal{P})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{P})\int\limits_a^b g(x)\,dx$, nechť c_1, $c_2\in\mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Pak i funkce $c_1\,f+c_2\,g$ má v $\langle a,b\rangle$ Perronův integrál a platí:

$$(\mathcal{P})\int_a^b [c_1\,f(x)+c_2\,g(x)]\,dx = c_1\,(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,dx + c_2\,(\mathcal{P})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Věta 5.9. Nechť funkce f má v $\langle a,b\rangle$ Perronův integrál $(\mathcal{P})\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Pak pro každý interval $\langle c,d\rangle\subset\langle a,b\rangle$ existuje $(\mathcal{P})\int\limits_c^d f(x)\,dx$.

Věta 5.10. Nechť na $\langle a,b\rangle$ je dána funkce f, nechť $c\in\langle a,b\rangle$, nechť existují integrály $(\mathcal{P})\int\limits_a^c f(x)\,dx$ a $(\mathcal{P})\int\limits_c^b f(x)\,dx$, pak existuje i $(\mathcal{P})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a platí

$$(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{P})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{P})\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Je-li f perronovsky integrovatelná, pak pro každé t z intervalu $\langle a,b\rangle$ můžeme psát $F(t)=(P)\int\limits_a^t f(x)\,dx$, kde F je neurčitým integrálem funkce f v $\langle a,b\rangle$, neboť pro všechna c, $d\in\langle a,b\rangle$ platí

$$F(d)-F(c)=\int_a^d f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx=\int_c^d f(x)\,dx$$

a F je spojitá.

5.3 Vztah Perronova, Newtonova a Lebesgueova integrálu

Věta 5.11. Má-li funkce f v $\langle a,b\rangle$ Newtonův integrál $(\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx$, pak zde má i Perronův integrál $(\mathcal{P})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a platí

$$(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N})\int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Věta 5.12. Má-li funkce f v $\langle a, b\rangle$ Lebesgueův integrál, pak má zde i v Perronův integrál a oba integrály mají stejnou hodnotu, tedy

$$(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Opačná implikace obecně neplatí. Například funkce f z příkladu 4.57 má Perronův integrál, protože má i Newtonův integrál, tato funkce ale není integrovatelná v Lebesgueově smyslu.

Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní, Perronův integrál není. Pokud $f \in \mathcal{P}(\langle a, b\rangle)$, pak z toho neplyne $|f| \in \mathcal{P}(\langle a, b\rangle)$, Perronův integrál je (stejně jako Newtonův integrál) neabsolutně konvergentní. Pokud ale existují integrály $(\mathcal{P})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{P})\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, pak říkáme, že Perronův integrál konverguje absolutně. Následující věta popisuje vztah mezi Lebesgueovým a Perronovým integrálem.

Věta 5.13. Nechť v $\langle a, b\rangle$ je dána funkce f. Pak platí, že Perronův integrál $(\mathcal{P})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konverguje absolutně právě tehdy, když Lebesgueův integrál $(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konverguje.

6 Kurzweilův integrál

6.1 Definice Kurzweilova integrálu

Kurzweilův integrál je součtový integrál, který je definován velmi podobně jako Riemannův integrál, avšak je obecnější. Jeho tvůrce vedla myšlenka vytvořit takový typ integrálu, který by bylo možno vyjádřit pomocí jistých integrálních součtů a pro který by byla zároveň splněna Newtonova - Leibnizova formule. Tento integrál je proto zobecněním i Newtonova integrálu. K definování Kurzweilova integrálu lze vystačit s elementárnějšími prostředky než u Lebesgueova (který vyžaduje užití pojmů míry a měřitelnosti) nebo Perronova integrálu (horní a dolní derivace). Kurzweilův integrál je obecnější i než Lebesgueův integrál a v případě integrování přes jednorozměrné intervaly má všechny výhody Lebesgueova integrálu.

Při konstrukci tohoto integrálu je základní myšlenkou vyjádřit hodnotu Newtonova integrálu pomocí nějakých integrálních součtů, které jsou Riemannova typu. Přibližme v následujících řádkách tento myšlenkový postup.

Mějme funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a nechť tato funkce má Newtonův integrál

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)\,.$$

Hodnotu Newtonova integrálu chceme vyjádřit pomocí integrálních součtů

$$\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Funkce F je primitivní k funkci f v $\langle a, b\rangle$, tzn. $F'(\tau) = f(\tau)$ pro každé $\tau \in \langle a, b\rangle$ a podle definice derivace to znamená, že k danému $\varepsilon > 0$ a k danému $\tau \in \langle a, b\rangle$ existuje $\Delta = \Delta(\tau, \varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pro které $0 < |x - \tau| < \Delta$, je

$$|\frac{F(x) - F(\tau)}{x - \tau} - f(\tau)| < \varepsilon\,,$$

tedy

$$|F(x) - F(\tau) - f(\tau)(x - \tau)| < \varepsilon|(x - \tau)|\,.$$

Vezmeme-li nyní x_{i-1}, $x_i \in \langle a, b\rangle$ taková, že

$$\tau - \Delta < x_{i-1} < \tau < x_i < \tau + \Delta\,,$$

pak platí

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\tau)(x_i - x_{i-1})| \leq$$
$$\leq |F(x_i) - F(\tau) - f(\tau)(x_i - \tau)| + |F(\tau) - F(x_{i-1}) - f(\tau)(\tau - x_{i-1})| \leq$$
$$\leq \varepsilon(|x_i - \tau| + |\tau - x_{i-1}|) = \varepsilon(x_i - x_{i-1})\,.$$

Předpokládejme, že existuje dělení s význačnými body intervalu $\langle a, b\rangle$

$$(D, \tau) = \{a = x_0, \tau_1, x_1, ..., x_{n-1}, \tau_n, x_n = b\}$$

(tzn. ve smyslu definice 3.10), pro které platí

$$\tau - \Delta < x_{i-1} < \tau_i < x_i < \tau + \Delta\,,\ \ i = 1, ..., n\,.$$

Pak platí

$$|(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})| = |F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})| =$$
$$= |\sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})]| \leq \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})| \leq$$
$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)\,.$$

To znamená, že Newtonův integrál lze s libovolnou přesností aproximovat integrálním součtem $\sum_{i=1}^n f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})$, který vystupuje v definici 3.11 Riemannova integrálu. Dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ však musí splňovat jisté podmínky.

Přistupme nyní k definování Kurzweilova integrálu.

Definice 6.1. Nechť $D = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že platí $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, a nechť jsou dány body τ_i, $i = 1, ..., n$ tak, že $x_{i-1} \leq \tau_i \leq x_i$. Pak symbolem D_τ označme množinu $D_\tau = \{x_0, \tau_1, x_1, ..., x_{n-1}, \tau_n, x_n\}$. Nechť je dále v $\langle a, b\rangle$ dána funkce $\Delta : \langle a, b\rangle \to (0, \infty)$, kterou nazveme kalibrem. Pak pokud pro dělení $D_\tau = \{x_0, \tau_1, x_1, ..., x_{n-1}, \tau_n, x_n\}$ platí

$$\langle x_{i-1}, x_i\rangle \subset (\tau_i - \Delta(\tau_i), \tau_i + \Delta(\tau_i))\,,\ \ i = 1, ..., n\,,$$

nazveme jej Δ-jemné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Množinu všech dělení, která jsou Δ-jemná vzhledem ke kalibru Δ, označme $A(\Delta, \langle a, b\rangle)$ nebo jen $A(\Delta)$.

Lemma 6.2 (Cousinovo lemma). Nechť je dán kalibr $\Delta : \langle a,b\rangle \to (0,\infty)$. Pak $A(\Delta, \langle a,b\rangle) \neq 0$, tzn. k tomuto kalibru vždy existuje dělení, které je Δ-jemné.

Definice 6.3. Nechť je v $\langle a,b\rangle$ dána funkce f a nechť $D_\tau = \{x_0, \tau_1, x_1, ..., x_{n-1}, \tau_n, x_n\}$ je libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Utvořme integrální součet

$$\sigma(f, D_\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Číslo $I \in \mathbb{R}$ nazveme Kurzweilovým integrálem funkce f v $\langle a,b\rangle$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\Delta : \langle a,b\rangle \to (0,\infty)$ tak, že pro každé Δ-jemné dělení D platí nerovnost

$$|\sigma(f, D_\tau) - I| < \varepsilon\,.$$

Kurzweilův integrál funkce f od a do b značíme $(\mathcal{K}) \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Pokud existuje $(\mathcal{K}) \int\limits_a^b f(x)\,dx$, řekneme, že funkce f je integrovatelná v Kurzweilově smyslu. Množinu všech funkcí integrovatelných v Kurzweilově smyslu značíme $\mathcal{K}(\langle a,b\rangle)$.

Poznámka 6.4.

1. Cousinovo lemma je pro definici Kurzweilova integrálu důležité, neboť podle něj vždy existuje dělení, které je Δ-jemné, a má proto smysl mluvit o integrálních součtech. Existence dělení u Riemannova integrálu je zřejmá.
2. Je-li $-\infty < b < a < \infty$, pak $(\mathcal{K}) \int\limits_a^b f(x)dx = -(\mathcal{K}) \int\limits_b^a f(x)dx$ a $(\mathcal{K}) \int\limits_a^a f(x)dx = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Srovnáme-li nyní Riemannův a Kurzweilův integrál, zjistíme, že integrální součty u obou integrálů jsou stejné, a rozdíl nalézáme u pojmu jemnost dělení. U Kurzweilova integrálu musí být dělení tak jemné, jak to vyžaduje kalibr Δ, který je kladnou funkcí na $\langle a,b\rangle$ (a který je určen derivací $F'(\tau) = f(\tau)$). U Riemannova integrálu musí mít dělení malou normu $\nu(D)$, $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, tzn. jemnost dělení je stanovena pevnou hodnotou δ. Jde tedy také o kladnou funkci a tato funkce je konstantní. Přes tuto nenápadnou změnu je množina funkcí $\mathcal{K}(\langle a,b\rangle)$ mnohem větší než množina $\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Určení hodnoty Kurzweilova integrálu přímo z definice je obtížné. Ve skutečnosti musíme nejprve odhadnout (nebo pomocí jiné, například Newtonovy definice nalézt) hodnotu integrálu a pak k danému ε sestrojit vhodný kalibr.

Příklad 6.5. Uvažujme funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ (tato funkce má Newtonův i Riemannův integrál). Nechť $(D, \tau) = \{a = x_0, \tau_1, x_1, ..., \tau_n, x_n = b\}$ je Δ-jemné dělení s neznámým kalibrem Δ. Určeme tento kalibr Δ tak, aby integrální součty tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})$ nám poskytly aproximaci integrálu funkce $f(x) = x^2$ na $\langle 0, 1\rangle$ s přesností danou ε.

Uvažujme součty $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})$. Hodnota integrálu přes interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je zřejmě $F(x_i) - F(x_{i-1})$. Podle věty o střední hodnotě existuje $z_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ tak, že $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(z_i)(x_i - x_{i-1})$. Nyní podle nerovnosti

$$|\sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})]| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

odvozené na začátku této kapitoly dostaneme

$$|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{3}x_{i-1}^3 - \tau_i^2(x_i - x_{i-1})| = |\sum_{i=1}^{n} z_i^2(x_i - x_{i-1}) - \tau_i^2(x_i - x_{i-1})| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{n}(z_i^2 - \tau_i^2)(x_i - x_{i-1})| = |\sum_{i=1}^{n}(z_i - \tau_i)(z_i + \tau_i)(x_i - x_{i-1})| \, .$$

Pokud $|z_i - \tau_i| \leq \Delta$, pak $z_i + \tau_i \leq \Delta + 2\tau_i$ a

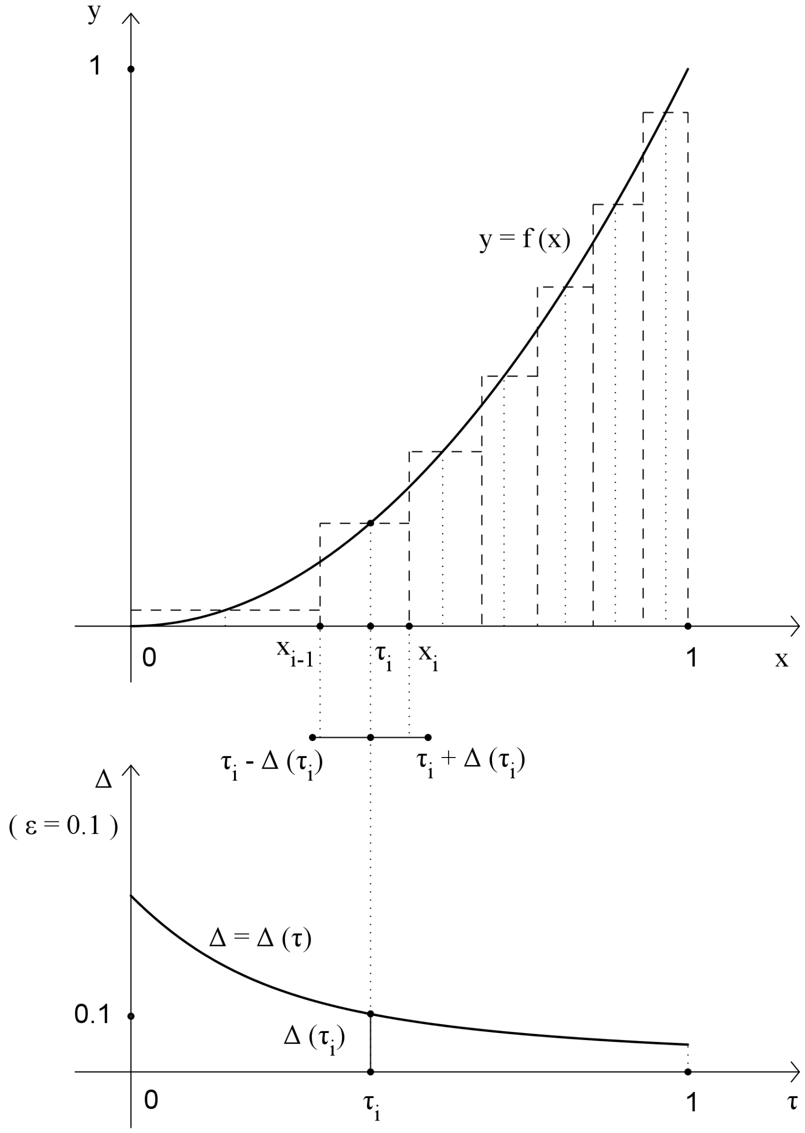
$$|\sum_{i=1}^{n}(z_i - \tau_i)(z_i + \tau_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta(\Delta + 2\tau_i)(x_i - x_{i-1}) \, .$$

Chceme aby

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(\Delta + 2\tau_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \, .$$

Z rovnosti $\Delta(\Delta + 2\tau_i) = \varepsilon$ dostaneme pro kalibr $\Delta = -\tau_i + \sqrt{\tau_i^2 + \varepsilon}$, tedy

$$\Delta(\tau_i, \varepsilon) : \tau_i \to -\tau_i + \sqrt{\tau_i^2 + \varepsilon} \, .$$



Obrázek 9: K příkladu 6.5.

Věta 6.6 (Bolzanova-Cauchyova podmínka existence Kurzweilova integrálu). Funkce f má v $\langle a,b\rangle$ Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\Delta : \langle a,b\rangle \to (0,\infty)$ tak, že pro libovolná dvě Δ-jemná dělení $D_{\tau,1}$, $D_{\tau,2}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ platí

$$|\sigma(f,D_{\tau,1}) - \sigma(f,D_{\tau,2})| < \varepsilon\,.$$

Příklad 6.7. Uvažujme funkci $f(x) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} + 2x\sin\frac{\pi}{x^2} & \text{pro } x \in (0,1\rangle \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$.
V předchozích kapitolách bylo ukázáno, že pro funkci f platí $f \notin \mathcal{L}(\langle 0,1\rangle) \wedge f \in \mathcal{N}(\langle 0,1\rangle)$. Pozměníme-li tuto funkci na množině míry nula racionálních čísel tak, aby v těchto bodech nabývala hodnoty 1, pak taková funkce stále nemá Lebesgueův integrál, nemá Newtonův integrál, avšak má Kurzweilův integrál. Tedy pro funkci $g(x) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} + 2x\sin\frac{\pi}{x^2} & \text{pro } x \in \mathbb{I} \cap (0,1\rangle \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap (0,1\rangle \end{cases}$ zřejmě platí $g \notin \mathcal{L}(\langle 0,1\rangle) \wedge g \notin \mathcal{N}(\langle 0,1\rangle) \wedge g \in \mathcal{K}(\langle 0,1\rangle)$. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{K}(\langle a,b\rangle) = \mathcal{P}(\langle a,b\rangle)$, což bude ukázáno v kapitole 7, platí také $g \in \mathcal{P}(\langle 0,1\rangle)$.

6.2 Vlastnosti Kurzweilova integrálu

Věta 6.8. Nechť funkce f, g mají v $\langle a,b\rangle$, $a < b$ Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{K})\int\limits_a^b g(x)\,dx$, nechť c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Pak i funkce $c_1 f + c_2 g$ má v $\langle a,b\rangle$ Kurzweilův integrál a platí:

$$(\mathcal{K})\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx = c_1\,(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\,dx + c_2\,(\mathcal{K})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Důsledek 6.9. Nechť funkce f, g jsou dány v intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť množina $\{x \in \langle a,b\rangle : f \neq g\}$ je nejvýše spočetná. Pak existuje-li jeden z integrálů $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $(\mathcal{K})\int\limits_a^b g(x)\,dx$, pak existuje i druhý a platí

$$(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{K})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(Spočetné množiny jsou tak "malé", že nemají vliv na hodnotu integrálu.)

Věta 6.10. Nechť funkce f má v $\langle a,b\rangle$ Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Pak pro každý interval $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$ existuje $(\mathcal{K})\int\limits_c^d f(x)\,dx$.

Věta 6.11. Nechť na $\langle a,b\rangle$ je dána funkce f, nechť $c \in \langle a,b\rangle$. Pak platí, že $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ existuje právě, když existují integrály $(\mathcal{K})\int\limits_a^c f(x)\,dx$ a $(\mathcal{K})\int\limits_c^b f(x)\,dx$

a platí

$$(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{K})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{K})\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Věta 6.12. Nechť v $\langle a,b\rangle$ je dána funkce f, která má zde Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx$, a nechť $f(x)\geq 0$ pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$. Pak platí

$$(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Důsledek 6.13. Nechť f, g mají v $\langle a,b\rangle$ Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a $(\mathcal{K})\int\limits_a^b g(x)\,dx$ a nechť $f(x)\geq g(x)$ pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$. Pak platí

$$(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\,dx \geq (\mathcal{K})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Věta 6.14. Nechť funkce f má v $\langle a,b\rangle$ Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a nechť funkce $|f|$ má v $\langle a,b\rangle$ Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. Pak platí:

$$|(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\,dx| \leq (\mathcal{K})\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Skutečnost, že nějaká funkce f je integrovatelná v Kurzweilově smyslu, neimplikuje existenci integrálu absolutní hodnoty $|f|$ této funkce. Kurzweilův integrál je neabsolutně konvergentní.

Věta 6.15. Nechť funkce f je v $\langle a,b\rangle$ spojitá. Pak f je integrovatelná v Kurzweilově smyslu.

6.3 Vztah Kurzweilova, Riemannova a Newtonova integrálu

Věta 6.16. Nechť f má v $\langle a,b\rangle$ Riemannův integrál $(\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Pak existuje také Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a platí

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{K})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Věta 6.17. Nechť f má v $\langle a, b\rangle$ Newtonův integrál $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,dx$. Pak existuje také Kurzweilův integrál $(\mathcal{K}) \int_a^b f(x)\,dx$ a platí

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{K}) \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Kurzweilův integrál zahrnuje jak Newtonův, tak Riemannův integrál. Srovnáme-li Perronův a Kurzweilův integrál, lze říci, že zavedení Kurzweilova integrálu je jednodušší v tom smyslu, že lze vystačit s elementárnějšími prostředky, než jaké použil Perron ve své definici. V kapitole 7 bude ukázáno, že poslední dva jmenované integrály jsou ekvivalentní.

6.4 Definice Kurzweilova integrálu přes neomezený interval

Obdobně jako u Riemannova integrálu je definice Kurzweilova integrálu zavedena jen pro omezené intervaly a nejsou v ní obsaženy integrály typu $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$. Integrál přes neomezené intervaly definován jako limita integrálů v konečných mezích.

6.5 Neurčitý integrál

Definice 6.18. Řekneme, že funkce F je v intervalu I (interval libovolného druhu) neurčitým integrálem funkce f, když pro každé c, $d \in I$ platí

$$(\mathcal{K}) \int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c)\,.$$

Věta 6.19. Nechť funkce F je v intervalu I primitivní funkcí k funkci f. Pak F je neurčitým (Kurzweilovým) integrálem k funkci f v I.

Věta 6.20. Nechť $I = \langle a, b\rangle$. Nechť pro funkci f existuje v (a, b) primitivní funkce F a dále nechť existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$, $\lim\limits_{x\to a+} F(x)$. Pak existuje $(\mathcal{K}) \int_a^b f(x)\,dx$ a platí

$$(\mathcal{K}) \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\,.$$

Tato věta udává souvislost Kurzweilova a Newtonova integrálu, přičemž se zde požaduje pouze existence primitivní funkce v otevřeném intervalu (a, b). Věta je také návodem k výpočtu Kurzweilova integrálu pomocí primitivní funkce. Určit hodnotu integrálu přímo z definice je obtížné.

Věta 6.21. Nechť $f \in \mathcal{K}(\langle a, b\rangle)$. Pro $t \in \langle a, b\rangle$ definujme neurčitý integrál

$$F(t) = \int_a^t f(s)\, ds\,.$$

Pak platí

$$F'(x) = f(x)$$

skoro všude v $\langle a, b\rangle$.

Věta 6.22. Nechť $f \in \mathcal{K}(\langle a, b\rangle)$. Pak platí, že f je absolutně integrovatelná (tedy $|f| \in \mathcal{K}(\langle a, b\rangle)$) právě tehdy, když neurčitý integrál

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

je funkce s konečnou variací. V tom případě platí

$$\mathrm{var}_a^b F = \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Věta 6.23. Nechť $f \in \mathcal{K}(\langle a, b\rangle)$. Pak platí, že $|f| \in \mathcal{K}(\langle a, b\rangle)$ (tzn. f je absolutně integrovatelná) právě když neurčitý integrál funkce f

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx\,, \quad t \in \langle a, b\rangle$$

je absolutně spojitá funkce.

7 Vztah mezi jednotlivými typy integrálů

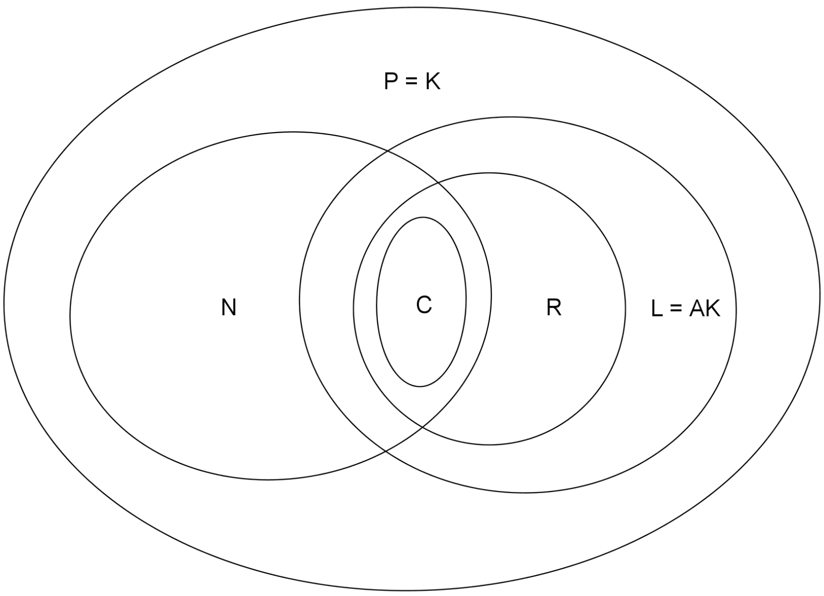
Omezme se v této kapitole na případ uzavřeného a omezeného intervalu $I = \langle a, b\rangle$, $I \subset \mathbb{R}$. Množiny integrovatelných funkcí ve smyslu Newtona, Riemanna, Lebesguea, Perrona a Kurzweila označme po řadě $\mathcal{N}(\langle a,b\rangle), \mathcal{R}(\langle a,b\rangle), \mathcal{L}(\langle a,b\rangle), \mathcal{P}(\langle a,b\rangle), \mathcal{K}(\langle a,b\rangle)$. Dále nechť $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ značí množinu všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$ a symbolem $\mathcal{AK}(\langle a,b\rangle)$ označme množinu funkcí $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, pro které $f \in \mathcal{K}(\langle a,b\rangle)$ a zároveň $|f| \in \mathcal{K}(\langle a,b\rangle)$ (jde tedy o množinu absolutně integrovatelných funkcí v Kurzweilově smyslu). V následujících pododstavcích dokážeme, že

$$\mathcal{C}(\langle a,b\rangle) \subsetneqq \mathcal{N}(\langle a,b\rangle) \subsetneqq \mathcal{K}(\langle a,b\rangle) = \mathcal{P}(\langle a,b\rangle)$$

a

$$\mathcal{C}(\langle a,b\rangle) \subsetneqq \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \subsetneqq \mathcal{L}(\langle a,b\rangle) = \mathcal{AK}(\langle a,b\rangle) \subsetneqq \mathcal{K}(\langle a,b\rangle) = \mathcal{P}(\langle a,b\rangle).$$

Uvedená rekapitulace je graficky znázorněna na obrázku. Ještě pro úplnost dodejme, že když pro funkci $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ existují alespoň dva z uvedených integrálů, pak tyto integrály jsou si rovny.



Obrázek 10: Vztah mezi jednotlivými typy integrálů.

7.1 Vztah Newtonova a Riemannova integrálu

Dokážeme nejprve následující větu.

Věta 7.1. Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a nechť funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je taková, že existují její Riemannův i Newtonův integrál. Potom

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(t)\, dt = (\mathcal{N}) \int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)\,,$$

kde F je primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b) a F je spojitá v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Vzhledem k definici Newtonova integrálu stačí ukázat, že Riemannův integrál je roven $F(b) - F(a)$.

Nechť $(D, \tau) = \{a = x_0,\, \tau_1,\, x_1,\, ...,\, x_{n-1},\, \tau_n,\, x_n = b\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s význačnými body τ_1 až τ_n. Protože Riemannův integrál existuje, k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé dělení D s normou menší než δ bude

$$|\sigma(D, \tau) - (\mathcal{R}) \int_a^b f(t)\, dt| < \varepsilon\,, \tag{1}$$

kde

$$\sigma(D, \tau) = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{a} \quad \tau_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle,\ i = 1, ..., n\,.$$

Nerovnost (1) je přitom splněna pro libovolný výběr bodu $\tau_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Protože funkce F je spojitá v $\langle a, b\rangle$, je spojitá i v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a v každém vnitřním bodě tohoto intervalu má vlastní derivaci F'. Podle věty o střední hodnotě existuje $\widetilde{\tau}_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tak, že

$$F'(\widetilde{\tau}_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\,,\quad F'(\widetilde{\tau}_i) = f(\widetilde{\tau}_i)\,,$$

odtud

$$F'(\widetilde{\tau}_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\widetilde{\tau}_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Utvořme součet

$$\sigma(D, \widetilde{\tau}) = \sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{\tau}_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a)\,.$$

Pak vzhledem k (1), kde $\tau_i = \widetilde{\tau}_i$, je

$$|F(b) - F(a) - (\mathcal{R}) \int_a^b f(t)\, dt| < \varepsilon\,,$$

kde ε je libovolně malé.

Pozornost nyní věnujeme tomu, že spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ má Riemannův i Newtonův integrál. Dokážeme nejprve větu 3.17, která je uvedena v 3. kapitole.

Věta 3.17. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak existuje $(\mathcal{R})\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (tzn. $\mathcal{C}(\langle a, b\rangle) \subset \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$).

Důkaz: Existence Riemannova integrálu plyne z Bolzanovy - Cauchyovy podmínky pro jeho existenci (věta 3.8) a z toho, že spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu je stejnoměrně spojitá. Podle věty 3.8 má funkce f v $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, že platí $S(D) - s(D) < \varepsilon$.

Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$. Protože funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak je zde stejnoměrně spojitá, a existuje tedy $\delta > 0$ takové, že pro libovolná $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, jejichž vzdálenost je menší než δ, platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Volíme dělení D_1 tak, aby $\nu(D_1) < \delta$. Funkce f je spojitá v $\langle a, b\rangle$, a je tedy spojitá i v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ dělení D_1. Na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nabývá funkce f svého maxima $M_i = f(\eta_i)$ i minima $m_i = f(\xi_i)$, přičemž platí

$$|\xi_i - \eta_i| < \delta \quad \text{a} \quad 0 \le M_i - m_i = f(\eta_i) - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}\,,$$

a tedy

$$S(f, D_1) - s(f, D_1) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon\,,$$

což jsme chtěli ukázat.

Existence Newtonova integrálu pro spojitou funkci vyplývá z následující věty:

Věta 7.2. Funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$ má v každém jeho bodě primitivní funkci (v krajních bodech derivaci zprava, resp.zleva).

Důkaz: Položme $F(x) = (\mathcal{R})\int\limits_a^x f(t)\,dt$ pro $x \in \langle a, b\rangle$ (existence F je zaručena předchozí větou). Omezme se dále na bod $x_0 \in (a, b)$ (v případě krajních bodů

$x = a$ nebo $x = b$ by byl postup analogický). Funkce f je spojitá v $x_0 \in (a, b)$ a tedy k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$. Pro $x \neq x_0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$ platí
$|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)| = |\frac{1}{x-x_0}(\int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt) - \frac{f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}| =$
$= |\frac{1}{x-x_0}(\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^x f(x_0)\,dt| = \frac{1}{|x-x_0|}|\int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt| \leq$
$\leq \frac{1}{|x-x_0|}|\int\limits_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt| \leq \frac{1}{|x-x_0|}|\int\limits_{x_0}^x \varepsilon\,dt| = \frac{1}{|x-x_0|}|x - x_0|\,\varepsilon = \varepsilon.$
Tedy $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. V libovolném vnitřním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje derivace funkce F a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

K důkazu $\mathcal{C}(\langle a, b\rangle) \subset \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ je ještě třeba ukázat, že existují vlastní limity $\lim\limits_{x \to a-} F(x)$ a $\lim\limits_{x \to b+} F(x)$. To je však zřejmé, neboť f je spojitá v $\langle a, b\rangle$, a tedy i F je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a limity existují.

Příklad funkce, která má Newtonův a nemá Riemannův integrál je uveden v kapitole 2 (příklad 2.17), naopak, funkce, která nemá Newtonův a má Riemannův integrál, je uvedena v kapitole 3 (příklad 3.21).

7.2 Vztah Newtonova a Perronova integrálu

Věta 5.11. Má-li funkce f v $\langle a, b\rangle$ Newtonův integrál $(\mathcal{N}) \int\limits_a^b f(x)\,dx$, pak zde má i Perronův integrál $(\mathcal{P}) \int\limits_a^b f(x)\,dx$ a platí

$$(\mathcal{P}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N}) \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Důkaz: Má-li funkce f v $\langle a, b\rangle$ primitivní funkci F, tzn. existuje-li derivace $F'(x) = f(x)\ \forall x \in \langle a, b\rangle$, pak pro tuto derivaci platí

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \limsup_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \liminf_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}\,,$$

tzn.

$$F'(x) = \overline{D}F(x) = \underline{D}F(x)\,.$$

Tato primitivní funkce F je tedy současně majorantou i minorantou k funkci f v $\langle a, b\rangle$ (ve smyslu definice 5.3). Podle věty 5.7 Perronův integrál existuje, neboť dosadíme-li ve vztahu $M(b)–M(a)-(m(b)–m(a)) \leq \varepsilon$ za M a m funkci F, podmínka je vždy splněna.

Majoranty a minoranty v definici Perronova integrálu nahrazují pojem primitivní funkce, požadavky na ně jsou však slabší než požadavek existence primitivní funkce v případě Newtonova integrálu. Proto množina funkcí $\mathcal{P}(\langle a, b\rangle)$ bude zřejmě větší než množina $\mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$. Platí $\mathcal{N}(\langle a, b\rangle) \subsetneqq \mathcal{P}(\langle a, b\rangle)$.

Příklad funkce, která nemá Newtonův a má Perronův integrál, je uveden v kapitole 6 (příklad 6.7).

7.3 Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu

V této kapitole dokážeme větu 4.27 z kapitoly 4.3.

Věta 4.27. Má-li $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál, pak zde má i Lebesgueův integrál a oba integrály jsou si rovny, tj.

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

V důkazu budeme pracovat s pojmem jednoduchá funkce, proto jej nyní zavedeme.

Definice 7.3. Nezápornou funkci $h : M \to \mathbb{R}$ nazveme jednoduchou funkcí, jestliže existují reálná čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ a měřitelné množiny $M_1, M_2, ..., M_n$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ $\forall i \neq j \wedge \bigcup_{i=1}^{n} M_i = M$ tak, že

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{M_i}\,.$$

Lebesgueův integrál jednoduché funkce definujeme vztahem

$$(\mathcal{L}) \int_M h\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(M_i)\,.$$

Jednoduchá funkce je funkce, jejíž obor hodnot je konečná množina. Je to lineární kombinace konečně mnoha charakteristických funkcí. Lze ukázat, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci f existuje posloupnost $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých funkcí taková, že $0 \le h_n \le h_{n+1}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = f$.

Nyní přistupme k důkazu věty 4.27.

Důkaz: Nechť funkce $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Potom existují dělení D_n a D_{n+1} taková, že D_{n+1} je zjemněním dělení D_n a že $\nu(D_n) \to 0$. Tedy

$$s(f,D_{n-1}) \le s(f,D_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \to (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{pro } n\to\infty\,,$$

$$S(f,D_{n-1}) \ge S(f,D_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \to (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{pro } n\to\infty\,,$$

$$m_i = \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x),\ M_i = \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\,.$$

Nechť h_n, $H_n : \langle a,b\rangle \to R$ jsou jednoduché funkce definované vztahy

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\chi_i(x)\,,\quad H_n(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\chi_i(x)\,,$$

kde $\chi_i(x)$ značí charakteristickou funkci intervalu $\langle x_{i-1}, x_i)$. Zřejmě

$$h_1(x) \le h_n(x) \le h_{n+1}(x) \le f(x) \le H_{n+1} \le H_n \le H_1(x) \quad \text{pro všechna } x \in \langle a,b\rangle\,.$$

Vzhledem k monotonii h_n a H_n existují funkce h a H takové, že

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} H_n(x) = H(x),$$

přičemž tedy

$$h \le f \le H\,. \tag{2}$$

Protože h_n a H_n jsou jednoduché funkce, jsou tyto funkce Lebesgueovsky integrovatelné, tzn. h_n, $H_n \in \mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$, přičemž

$$(\mathcal{L})\int_a^b h_n(x)dx = s(f,D_n) \quad \text{a} \quad (\mathcal{L})\int_a^b H_n(x)dx = S(f,D_n)\,.$$

Nyní podle věty o majorizovaném limitním přechodu bude $h \in \mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ a také $H \in \mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ (majoranta φ je zaručena existencí funkcí h_1, H_1), přičemž

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{L})\int_a^b h_n(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_a^b h(x)\,dx\,,$$

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int_a^b H_n(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_a^b H(x)\,dx\,.$$

Vzhledem k (2) ovšem i $f \in \mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_a^b h(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_a^b H(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Příklad funkce, která nemá Riemannův a má Lebesgueův integrál, je uveden v kapitole 3 a 4 (příklad 3.16, 4.28).

7.4 Vztah Lebesgueova a Perronova integrálu

V tomto odstavci je cílem ukázat, že z existence Lebesgueova integrálu pro nějakou funkci f plyne i existence Perronova integrálu pro tuto funkci a že oba integrály jsou si pak rovny. Budeme přitom vycházet z poměrně hluboké následující věty 7.5, která je dokázána například v [2]. Nejdříve pro úplnost připomeneme definici polospojité funkce.

Definice 7.4. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in M; f(x) < c\}$$

otevřená v M, říkáme, že f je shora polospojitá v M. Jestliže pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{x \in M; f(x) > c\}$$

otevřená v M, říkáme, že f je zdola polospojitá v M. (Na M se uvažuje topologie indikovaná eukleidovským prostorem $E_1 = \mathbb{R}$).

Věta 7.5. Nechť množina $M \subset \mathbb{R}$ je měřitelná. Nechť funkce f je definovaná všude v M a nechť má Lebesgueův integrál na M. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Potom existují funkce φ, ψ s následujícími vlastnostmi:

1. φ je polospojitá zdola v M, ψ polospojitá shora v M,
2. φ je zdola omezená v M, ψ omezená shora v M,
3. $\varphi(x) \geq f(x) \geq \psi(x)$ pro každé $x \in M$,
4. $-\infty < \int\limits_M \varphi(x)\,dx - \varepsilon < (\mathcal{L})\int\limits_M f(x)\,dx < \int\limits_M \psi(x)\,dx + \varepsilon < \infty$.

Dále budeme v tomto případě pracovat pouze s takovou množinou M, která je intervalem.

Nyní přikročme k důkazu následující věty.

Věta 7.6. Nechť f je funkce definovaná v $\langle a, b\rangle$ a nechť integrál

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\,dx$$

konverguje. Potom existuje i Perronův integrál

$$(\mathcal{P}) \int_a^b f(x)\,dx$$

a platí

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{P}) \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Důkaz: Omezíme se na situaci, kdy a, b jsou konečná čísla. Nechť $\varepsilon > 0$, potom podle předchozí věty 7.5 existují funkce φ a ψ splňující vlastnosti 1 - 4 této věty, kde $M = \langle a, b\rangle$. Položíme

$$\Phi(x) = (\mathcal{L}) \int_a^x \varphi(t)\,dt\,, \quad \Psi(x) = (\mathcal{L}) \int_a^x \psi(t)\,dt$$

pro $x \in \langle a, b\rangle$. Ukážeme, že

$$\underline{D}\Phi(x) \geq \varphi(x)\,, \quad \overline{D}\Psi(x) \leq \psi(x)\,. \tag{3}$$

Pak s využitím vlastnosti 3 z věty 7.5 je

$$\overline{D}\Psi(x) \leq f(x) \leq \underline{D}\Phi(x)$$

a dále dle vlastnosti 4 je $\Phi(x) - \varepsilon < \Psi(x) + \varepsilon$, tj.

$$\Phi(x) - \Phi(a) - (\Psi(x) - \Psi(a)) < 2\varepsilon\,,$$

neboť $\Phi(a) = \Psi(a) = 0$. Existence Perronova integrálu pak plyne z věty 5.5, kde $M \equiv \Phi$ a $m \equiv \Psi$ jsou příslušnou majorantou a minorantou. Hodnota Perronova integrálu je $P \in \langle \Psi(b), \Phi(b)\rangle$. To spolu s vlastností 4 dává

$$(\mathcal{P}) \int_a^b f(x)\,dx - (\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\,dx < |\Psi(b) - \Phi(b)| < 2\varepsilon\,.$$

Zbývá ukázat, že platí (3). Zvolme $x \in \langle a, b\rangle$ a nechť $c < \varphi(x)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Protože z definice polospojitosti zdola je množina $\{\xi \in \langle a, b\rangle, \varphi(\xi) > c\}$ otevřená v $\langle a, b\rangle$, leží nějaké okolí (vzhledem k $\langle a, b\rangle$) bodu x v této množině. Tedy existuje jisté $\delta > 0$, že pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ splňující $|t - x| < \delta$ platí $\varphi(t) > c$. Pro $|h| < \delta$ s $x+h \in \langle a, b\rangle$ je proto

$$\frac{1}{h}(\Phi(x+h) - \Phi(x)) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(t)\, dt > c\,.$$

Odtud $\underline{D}\Phi(x) \geq c$. Ukázali jsme tedy, že z $\varphi(x) > c$ vyplývá $\underline{D}\Phi(x) \geq c$. Proto nemůže nastat situace $\varphi(x) > \underline{D}\Phi(x)$ (to bychom číslo c vybrali mezi těmito hodnotami). Tím jsme tedy ukázali první z nerovností (3). Druhá nerovnost se dokáže analogicky.

7.5 Vztah Kurzweilova a Perronova integrálu

Ukážeme, že oba integrály jsou si rovny. Protože jejich definice vycházejí z odlišných koncepcí, budeme věnovat příslušnou pozornost důkazu následující věty. Tento důkaz sleduje postup uvedený v [3]. Vzhledem k předchozí podkapitole 7.4 je tak vyřčen i vztah Newtonova a Kurzweilova integrálu.

Věta 7.7. Nechť je dána funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Potom Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\, dx$ existuje právě tehdy, když existuje Perronův integrál $(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\, dx$ a platí

$$(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{P})\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Důkaz:

(Označujme v tomto důkazu Δ-jemné dělení D_τ pouze jako D.)

1. Nechť existuje Kurzweilův integrál $(\mathcal{K})\int_a^b f(x)\, dx$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje kalibr $\Delta : \langle a, b\rangle \to (0, \infty)$ tak, že pro každé Δ-jemné dělení $D = \{x_0, \tau_1, x_1, ..., \tau_n, x_n\}$ platí

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}) - (\mathcal{K})\int_a^b f(x)\, dx| = |\sigma(f, D) - (\mathcal{K})\int_a^b f(x)\, dx| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

   Pro body $x \in \langle a, b\rangle$ nechť D_x značí Δ-jemné dělení intervalu $\langle a, x\rangle$. Položme

$$m(x) = \inf_{D_x} \sigma(f, D_x)\,,\;\; m(a) = 0\,,$$

$$M(x) = \sup_{D_x} \sigma(f, D_x)\,, \quad M(a) = 0\,.$$

Vzhledem k (4) dostáváme

$$M(b) - M(a) - [m(b) - m(a)] \le$$

$$\le |\sup_{D_b} \sigma(f, D_b) - (\mathcal{K}) \int_a^b f(x)\, dx - \inf_{D_a} \sigma(f, D_a) + (\mathcal{K}) \int_a^b f(x)\, dx| \le \varepsilon\,.$$

Vzhledem k větě 5.5 stačí dále ukázat, že funkce M je majoranta a m minoranta k funkci f v $\langle a, b\rangle$.

Nechť $c \le \tau \le d$ leží v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $|c - \tau| < \Delta(\tau)$, $|d - \tau| < \Delta(\tau)$. Podle definice funkce M je

$$f(\tau)(d - c) + M(c) \le M(d)\,,$$

a proto také

$$f(\tau) \le \frac{M(d) - M(c)}{d - c} \quad \text{pro } d > c\,.$$

Jestliže dále položíme $c = \tau$ nebo $d = \tau$, obdržíme ihned

$$f(\tau) \le \liminf_{y \to \tau} \frac{M(y) - M(\tau)}{y - \tau} = \underline{D}M(\tau)\,.$$

Tedy M je skutečně majoranta k funkci f. Obdobně lze ukázat, že funkce m je minoranta k f. Dokázali jsme, že existuje-li Kurzweilův integrál, pak existuje i majoranta M a minoranta m k funkci f, a existuje tedy i Perronův integrál.

2. Nyní předpokládejme, že existuje Perronův integrál $(\mathcal{P}) \int_a^b f(x)\, dx$, a dokážeme, že existuje i Kurzweilův integrál $(\mathcal{K}) \int_a^b f(x)\, dx$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z existence Perronova integrálu plyne, že existují majoranta M a minoranta m k funkci f takové, že

$$M(b) - M(a) - \frac{\varepsilon}{2} < (\mathcal{P}) \int_a^b f(x)\, dx < m(b) - m(a) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5}$$

Vzhledem k definici majoranty lze předpokládat, že pro každé $\eta > 0$ existuje kalibr $\Delta_M(\tau)$ takový, že pro $0 < |s - \tau| < \Delta_M(\tau)$, $s, \tau \in \langle a, b\rangle$ platí

$$f(\tau) - \eta \le \underline{D}M(\tau) - \eta \le \frac{M(s) - M(\tau)}{s - \tau}\,. \tag{6}$$

Jestliže nyní volíme c, $d \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\tau - \Delta_M(\tau) < c \le \tau < d \le \tau + \Delta_M(\tau)\,,$$

dostaneme pomocí (6)

$$f(\tau)(d-c) = f(\tau)(d-\tau) - f(\tau)(c-\tau) \leq$$

$$\leq M(d) - M(\tau) + \eta(d-\tau) + M(\tau) - M(c) + \eta(\tau - c) =$$

$$= M(d) - M(c) + \eta(d-c)\,.$$

Obdobně pro minorantu m lze ukázat, že pro $\eta > 0$ existuje $\Delta_m(\tau)$ tak, že když je $\tau - \Delta_m(\tau) < c \leq \tau < d \leq \tau + \Delta_m(\tau)$, platí nerovnost

$$m(d) - m(c) - \eta(d-c) \leq f(\tau)(d-c)\,.$$

Uvažujme dále kalibr $\overline{\Delta(\tau)} = \min(\Delta_M(\tau), \Delta_m(\tau))$ (kalibr, který je minimem kalibrů pro majorantu M a minorantu m). Pro dělení $D = \{x_0, \tau_1, x_1, ..., \tau_n, x_n\}$, které je $\overline{\Delta}$-jemné, dostaneme nerovnost

$$m(x_i) - m(x_{i-1}) - \eta(x_{i-1} - x_i) \leq f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq M(x_i) - M(x_{i-1}) + \eta(x_i - x_{i-1})\,.$$

Po sečtení přes $i = 1, 2, ..., n$ a přidáním $-P$ bude

$$m(b) - m(a) - \eta(b-a) - P \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}) - P \leq$$

$$\leq M(b) - M(a) + \eta(b-a) - P\,.$$

Jestliže P v této nerovnosti bude Perronův integrál $(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,dx$, pak pomocí (5) ihned obdržíme

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \eta(b-a) \leq \sigma(f, D) - (\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \eta(b-a)\,,$$

kde $\sigma(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})$. Jestliže zvolíme $\eta > 0$ tak malé, že $\eta(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}$, potom pro jakékoliv uvažované $\overline{\Delta}$-jemné dělení platí

$$|\sigma(f, D) - (\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,dx| < \varepsilon\,. \tag{7}$$

Z definice Kurzweilova integrálu, kde vystupují součty $\sigma(f, D)$, a ze vztahu (7) je již dokazované tvrzení zřejmé.

Uvedeme zde ještě větu, která udává vztah mezi Lebesgueovým a Kurzweilovým integrálem. Větu ponecháme bez důkazu.

Věta 7.8. Funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ má v intervalu $\langle a, b\rangle$ Lebesgueův integrál právě tehdy, když je absolutně integrovatelná v Kurzweilově smyslu. Pak platí

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{K}) \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Příklad funkce, která nemá Lebesgueův ani Newtonův integrál a má Kurzweilův integrál, je uveden v kapitole 6 (příklad 6.7).

8 Závěr

V integrálním počtu funkcí jedné proměnné se neobejdeme bez Newtonova integrálu, protože pomocí primitivní funkce, kterou lze vhodným způsobem zobecnit, se počítá velká část jednorozměrných integrálů. Newtonův integrál má oproti jiným integrálům (například oproti Riemannovu integrálu) tu výhodu, že jeho definice a výpočet nezávisí na tom, zda jsou integrovaná funkce a definiční obor omezený nebo ne, a není proto potřeba definici rozšířit o teorii nevlastních integrálů. Riemannův integrál je cenný pro svou pěknou názornou geometrickou interpretaci. Je dostatečným prostředkem ve většině inženýrských aplikací, avšak potřebám moderní matematické analýzy nestačí. Je nedostatečný již pro některé jednoduché funkce, jako například Dirichletova funkce nebo charakteristická funkce. Zobecněním Riemannova integrálu je Lebesgueův integrál. Každá funkce, která je lebesgueovsky měřitelná (za předpokladu například omezenosti), je na omezeném intervalu lebesgueovsky integrovatelná. Dá se říci, že pojem měřitelnosti v Lebesgueově teorii nahrazuje pojem spojitosti v Riemannově teorii. Definovat Lebesgueův integrál je náročnější, protože je nutné zavést teorii míry. Avšak to je vyváženo větší obecností, neboť množina funkcí, které lze integrovat v Lebesgueově smyslu je větší než množina riemannovsky integrovatelných funkcí a dále pro Lebesgueův integrál platí velmi užitečná konvergenční tvrzení (věty, jako například věta o majorizovaném limitním přechodu, v Riemannově teorii neplatí). Bohužel, Lebesgueův integrál nedovoluje integrovat každou derivaci, integruje pouze derivace absolutně spojitých funkcí. Lebesgueův integrál je zobecněním Riemannova integrálu, ne však Newtonova. Perronův a Kurzweilův integrál jsou dalším zobecněním. Perronův integrál je zobecněním Newtonova, ale (a to je zajímavé) i Lebesgueova integrálu. Přes veškerou svou obecnost nebyl tento integrál tolik rozpracován jako třeba Lebesgueův, zřejmě i díky své obtížné definici. Kurzweilův integrál je definován podobně jako Riemannův, avšak J. Kurzweil vycházel z předpokladu, že jeho integrál musí naplňovat Newtonovu-Leibnizovu formuli,; vznikl tedy integrál, který je zobecněním Newtonova i Riemannova (dokonce i Lebesgueova) integrálu. Poslední dva jmenované integrály, tj. Perronův a Kurzweilův, ačkoliv vycházejí z odlišných koncepcí, jsou ekvivalentní a dovolují integrovat každou derivaci.

Reference

[1] Jarník, Vojtěch: *Integrální počet I.* Praha, Academia 1974.

[2] Jarník, Vojtěch: *Integrální počet II.* Praha, Academia 1976.

[3] Schwabik, Štefan: *Integrace v R (Kurzweilova teorie).* Praha, Karolinum 1999.

[4] Schwabik, Štefan, Šarmanová, Petra: *Malý průvodce historií integrálu.* Praha, Prometheus 1996.

[5] Rektorys, Karel: *Přehled užité matematiky I.* Praha, Prometheus 1995.

[6] Černý, Ilja: *Úvod do inteligentního kalkulu 2 (1000 příkladů z pokročilejší analýzy.* Praha, Academia 2005.

[7] Nagy, Josef, Nováková, Eva, Vacek, Milan: *Integrální počet.* Praha, SNTL 1984.

[8] Tomiczek, Petr: *Matematická analýza I.* Plzeň, KMA ZČU 2006.

[9] Kubr, Milan: *Metrické prostory a Lebesgueův integrál.* Plzeň, KMA ZČU 2007.

[10] Liskevich, Vitali: *Measure Theory.* Swansea, Swansea University 1998.

[11] Sattinger, David, Harvey: *Measure Theory and Integration.* Fall, Yale University 2004.

[12] Ženíšek, Alexandr: *Funkcionální analýza.* Brno, PC-DIR Real 1999.

[13] http://www.maths.uq.edu.au/∽pa/tools.html