11. domácí úkol na 5. 1. 2011

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Příklady

Spočtěte následující příklady (jsou ze cvičení), určete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí na daném intervalu

1. $$f_n = \sin(\pi x^n),$$

   $[0, 1]$ (3 body)

2. $$f_n = \frac{4n\sqrt{nx}}{3 + 4n^2 x}$$

   $[0, \infty)$ (3 body)

3. Vyberte správnou kvantifikátorovou formulaci Abelova kritéria pro konvergenci řad funkcí.

   Nechť $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou takové, že

   (a) $\sum_n f_n$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$

   i. $$\forall f \, \forall \varepsilon \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 \, \exists x : \left| \sum_{k=n_0}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

   ii. $$\exists n_0 \, \forall f \, \forall \varepsilon \, \forall n \geq n_0 \, \exists x : \left| \sum_{k=n_0}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

   iii. $$\forall \varepsilon \, \exists f \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 \, \forall x : \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

   iv. $$\exists f \, \forall \varepsilon \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 \, \forall x : \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

   (b) posloupnost $\{g_n\}$ je stejnoměrně omezená na $\mathbb{R}$

   i. $$\forall x \, \exists M \, \forall n : |g_n(x)| \leq M$$

   ii. $$\forall n \, \exists M \, \forall x : |g_n(x)| \leq M$$

iii.

$$\forall x\, \forall n\, \exists M : |g_n(x)| \leq M$$

iv.

$$\exists M\, \forall x\, \forall n : |g_n(x)| \leq M$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ monotónní (libovolného typu, může být různá pro různá x).

i.

$$\forall x\, \forall n (f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \vee f_{n+1}(x) \leq f_n(x))$$

ii.

$$\forall x (\forall n f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \vee \forall n f_{n+1}(x) \leq f_n(x))$$

iii.

$$\forall x\, \forall n f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

iv.

$$\forall x\, \forall n f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

pak $\sum_n f_n g_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

(2 body)

4. Doplňte chybějící slova v následující formulaci Dirichletova kritéria pro konvergenci řad funkcí.

Nechť $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou takové, že

(a) posloupnost $\sum_{k=1}^{m} f_k$ je ...... omezená na $\mathbb{R}$

(b) g_n konverguje ...... k ...... na $\mathbb{R}$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ ...... (libovolného typu, může být různá pro různá x).

pak $\sum_n f_n g_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

(2 body)