5. úkol na 10. 11.

Kristýna Kuncová

1. Spočtěte objem tělesa M zadaného vztahem $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)$. (1 bod substituce (příp. obrázek), 1 bod nalezení mezí, 1 bod sestavení integrálu, 1 bod výpočet)

2. Spočtěte povrch tělesa, které vznikne jako průnik sféry $x^2+y^2+z^2=4a^2$, s válcem $x^2+y^2 \leq 2ax$, kde $a>0$. (výsledek je $8*a^2(\pi-2)$) (1 bod obrázek, 1 bod sestavení funkce $z(x,y)$, 1 bod průmět, 1 bod substituce, 1 bod meze, 1 bod sestavení integrálu, 1 bod výpočet)

   Návod: Povrch hladké křivočaré plochy $z=z(x,y)$ se spočítá podle vzorce

   $$S = \iint_M \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

   kde M je průmět dané plochy do roviny xy.

   Příklad na aplikaci věty: spočtěte povrch koule o poloměru $a>0$.

   Pro jednoduchost umístíme kouli do počátku a neb je symetrická, budeme počítat jen horní polokouli a výsledný povrch vynásobíme dvěma. Průmětem je množina $M=\{x^2+y^2 \leq a^2\}$. Parametrizací je funkce

   $$z(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

   Počítejme

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$
   $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

   Po dosazení

   $$\iint_M \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   Příklad vede na polární souřadnice φ

   $$x = r\cos\alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$r \in (0, a)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, Jakobián $J_\varphi = r$.

Získáme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\alpha = a \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a \mathrm{d}\alpha = 2\pi a^2.$$

Povrch polokoule o poloměru a je tedy $2\pi a^2$, povrch celé koule potom $4\pi a^2$.

3. Určete hmotnost koule o poloměru a. Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

   (1 bod substituce a meze, 1 bod sestavení integrálu, 1 bod výpočet)

4. Vysvětlete, proč se změní znaménko integrace na intervalu, pokud se interval "obrátí"

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = - \int_b^a f(x) \mathrm{d}x,$$

   ale znaménko se nemění u křivkového integrálu 1. druhu, "obrátí"-li se křivka

$$\int_c f(s) \mathrm{d}s = \int_{-c} f(s) \mathrm{d}s.$$

   (1 bod)