C

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1-2\sin x)}{\arcsin x} = -2$

(3x1) (0,5) (0,5)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log 1-2\sin x}{-2\sin x} \cdot -2\,\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{x}{\arcsin x} \overset{AL}{=} 1\cdot(-2)\cdot 1\cdot 1 = -2$

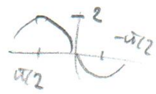
comp. func.

(2,0)

$f(y) = \dfrac{\log(1+y)}{y}$ $\quad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\log(1+y)}{y} = 1$ $\quad$ (I) $-2\sin x \neq 0$

$x \in P(0, \pi/2)$

$g(x) = -2\sin x$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} -2\sin x = 0$



② $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\tan(x^2)}}$ (0,5) $= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{\tan x^2}\log(\cos x)}$ (0,5) $= e^{-1/2}$

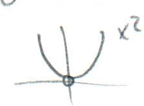
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\tan x^2}\cdot \log(\cos x) = \lim \dfrac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} \cdot -\dfrac{1-\cos x}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{\tan x^2}$

(1,5)

(0,5) $\overset{AL}{=} 1 \cdot -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$

comp. funct.

(3x1) (1) $f(y) = \dfrac{y}{\tan y}$ $\quad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{\tan y} = 1$ $\quad$ (I) $x^2 \neq 0$ $\quad x \in P(0, 1/2)$



$g(x) = x^2$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

(2) $f(y) = \dfrac{\log(y)}{y-1}$ $\quad \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{\log y}{y-1} = 1$ $\quad$ (I) $\cos x \neq 1$ $\quad x \in P(0, \pi/4)$

$g(x) = \cos x$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

(3) $f(y) = e^y$ $\quad \lim\limits_{y\to -1/2} e^y = e^{-1/2}$ $\quad$ (C) e^y cont at $-1/2$

$g(x) = \dfrac{\log(\cos x)}{\tan x^2}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1/2$

Goniometrické substituce

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Teorie

Buď $R(\cdot,\cdot)$ racionální funkce dvou proměnných.

1. Jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \sin x$. Pak $\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$.

2. Jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \cos x$. Pak $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$.

3. Jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \operatorname{tg} x$, je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy jsou

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \tag{1}$$

4. Vždy lze užít substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, je-li $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Pokud ale lze užít některou z výše uvedených substitucí, dáváme jí přednost. Transformační vztahy mají podobu

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{2}$$

5. Místo (3) lze užít i $t = \cot x$, je-li $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$\mathrm{d}x = \frac{-1\,\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \tag{3}$$

6. Místo (4) lze užít i $t = \cot \frac{x}{2}$, je-li $x \in (0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$\mathrm{d}x = \frac{-2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = -\frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{4}$$

(3) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{2+x^2}}$

(0,5) (a) $D_f = \mathbb{R}$

(0,5) (b) f cont at D_f (compos. of cont.)

(0,5) (c) $f(0) = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ $[0, -\sqrt{2}]$

$0 = \dfrac{x-2}{\sqrt{2+x^2}} \Rightarrow x = 2$ $[2, 0]$

(0,5) (d) $\underbrace{\text{not even, not odd}}$, not periodic

because of intercepts with axes

(1) (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{2+x^2}} = \lim \dfrac{x}{x} \cdot \dfrac{1 - 2/x}{\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}} = \dfrac{1-0}{\sqrt{0+1}} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|}} \cdot \dfrac{1 - 2/x}{\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}} = -1 \cdot \dfrac{1-0}{\sqrt{0+1}} = -1$

(1) (f) $f' = \dfrac{\sqrt{2+x^2} - (x-2)\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}}{\left(\sqrt{2+x^2}\right)^2} = \dfrac{\frac{2+x^2 - x(x-2)}{\sqrt{2+x^2}}}{(2+x^2)} =$

$= \dfrac{2+2x}{\sqrt{2+x^2}\,(2+x^2)}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$

(1) (h) $\dfrac{2(1+x)}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}}$

f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	-1	$\nearrow$

f decr. on $(-\infty, -1)$

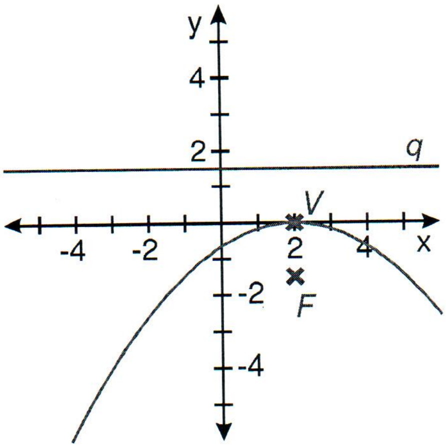
incr $(-1, \infty)$

$f(-1) = \dfrac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

(0,5) (i) at $x=-1$ is loc. minimum

(1) (j) $f'' = \left(\dfrac{2(1+x)}{(2+x^2)^{3/2}}\right)' = \dfrac{2(2+x^2)^{3/2} - 2(1+x)\cdot\frac{3}{2}(2+x^2)^{1/2}\cdot 2x}{(2+x^2)^3} =$

$= \dfrac{2\sqrt{2+x^2}}{(2+x^2)^3}\left(\underbrace{2+x^2 - (1+x)\cdot 3x}_{-2x^2-3x+2}\right)$ $D_{f''} = \mathbb{R}$



Osa paraboly je rovnoběžná s osou y, parabola je orientována směrem dolů $\Rightarrow$

ohnisko: $F\left[2;0-\frac{3}{2}\right]=\left[2;-\frac{3}{2}\right]$,

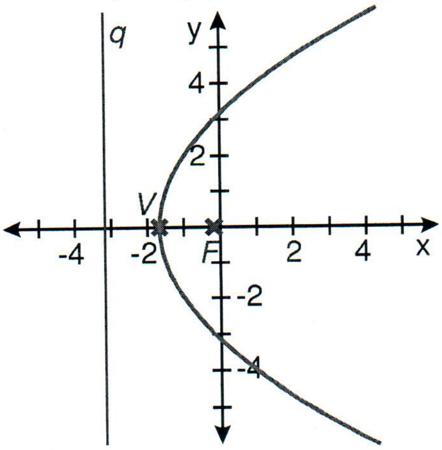
řídící přímka: $y=\frac{3}{2}$.

b) $y^2-6x-10=0$

Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici y: $y^2=6x+10$.

$y^2=6\left(x+\frac{10}{6}\right)$

$y^2=2\cdot 3\left(x+\frac{5}{3}\right)\Rightarrow$ vrchol: $V\left[-\frac{5}{3};0\right]$, parametr $p=3$.



Osa paraboly je rovnoběžná s osou x, parabola je orientována směrem doprava $\Rightarrow$

ohnisko: $F\left[-\frac{5}{3}+\frac{3}{2};0\right]=\left[-\frac{1}{6};0\right]$,

řídící přímka: $x=-\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{19}{6}$.

c) $y^2+y+4x+3=0$

Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici y: $y^2+2y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-4x-3$.

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-4x-3+\frac{1}{4}$

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-4x-\frac{11}{4}$

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-2\cdot 2\left(x+\frac{11}{16}\right)\Rightarrow$ vrchol: $V\left[-\frac{11}{16};-\frac{1}{2}\right]$, parametr $p=2$.

(k) $-2x^2-3x+2=0$

(1)

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{-4}=\frac{3\pm5}{-4}=\begin{cases}-2\\ +1/2\end{cases}$$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1/2)$	$1/2$	$(1/2,\infty)$
f''	$-$		$+$		$-$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$

f convex at $(-2,1/2)$
concave $(-\infty,-2)$, $(1/2,\infty)$

(l) asympt.

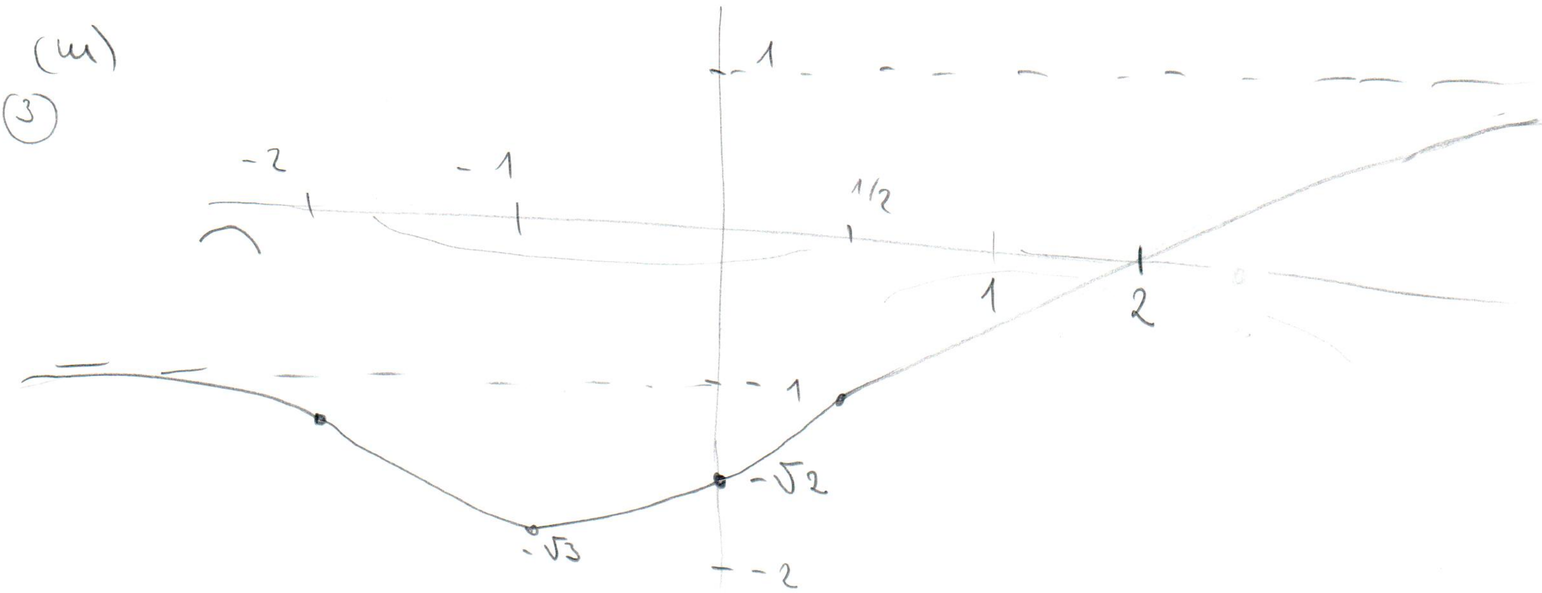
(1,5)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)-0x=1 \qquad \underline{\underline{y=0x+1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{-1}{\infty}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)-0x=-1 \qquad \underline{\underline{y=0x-1}}$$

(m)

(3)



(n) glob. min at $x=-1$

(0,5)

l., g max ∄

(o) $H_f=[-\sqrt{3},1)$

(0,5)

8b

Př. 4: Urči vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly dané rovnicí $x^2+2x-3y-2=0$. Načrtni obrázek paraboly.

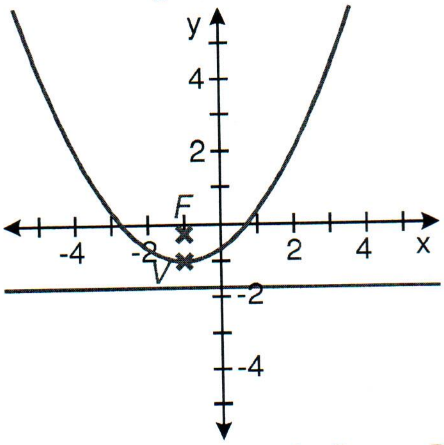
Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici x: $x^2+2x-3y-2=0$

$$x^2+2x\cdot 1+1^2-1^2=3y+2$$

$$(x+1)^2=3y+3$$

$$(x+1)^2=3(y+1)$$

$$(x+1)^2=2\cdot\frac{3}{2}(y+1) \Rightarrow \text{vrchol: } V[-1;-1]\text{, parametr } p=\frac{3}{2}.$$



Ohnisko: $F\left[-1;-1+\frac{3}{4}\right]=\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$, řídící přímka: $y=-1-\frac{3}{4}=-\frac{7}{4}$.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou je předčasné vytýkání na pravé straně, které předchází konečně úpravě levé strany na druhou mocninu.

8c

Př. 5: Urči vrchol, ohnisko a řídící přímku paraboly dané rovnicí:

a) $x^2-4x+6y+4=0$ b) $y^2-6x-10=0$

8d c) $y^2+y+4x+3=0$.

a) $x^2-4x+6y+4=0$

8c Upravujeme nejdřív závorku pro souřadnici x: $x^2-2x\cdot 2+2^2-2^2=-6y-4$

$$(x-2)^2-4=-6y-4$$

$$(x-2)^2=-2\cdot 3y \Rightarrow \text{vrchol: } V[2;0]\text{, parametr } p=3.$$