

11. cvičení – Extrémy na neomezené množině

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):

(a) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$, $M = [0, \infty)^2$.

Řešení: Zdroj příkladu: <https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf>

- Nejprve zkusíme najít lokální extrémy na množině $M^\circ = (0, \infty)^2$. Zderivujeme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3x\end{aligned}$$

Nulové body: Z druhé rovnice je

$$x = y^2,$$

tedy po dosazení do první

$$\begin{aligned}3y^4 - 3y &= 0 \\ y(y^3 - 1) &= 0\end{aligned}$$

Tedy máme dva podezřelé body: $[0, 0] \notin M^\circ$ a $[1, 1]$. Platí $f(1, 1) = -1$.

- Globální maximum funkce nemá: Uvažujme funkci $g(x) = f(x, 0)$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty.$$

Tedy funkce je zřejmě neomezená shora.

- Globální minimum je v bodě $[1, 1]$: Ukážeme, že na množině $K = [0, 3]^2$ je globální minimum v bodě $[1, 1]$. Dále ukážeme, že $f \geq 0$ na množině $M \setminus K$. Z toho pak vyplýne, že v $[1, 1]$ je globální minimum na M .

- Množina K je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Protože f je spojitá (polynom), tak na K nabývá (globálních) extrémů. Minimum může být pouze v bodě $[1, 1]$ (s hodnotou $f(1, 1) = -1$) nebo na hranici. Hranice je tvořena čtyřmi úsečkami. Na úsečce $(x, 0)$, kde $x \in [0, 3]$, a na úsečce $(0, y)$, kde $y \in [0, 3]$, platí $f(x, 0) = x^3 \geq 0$ a $f(0, y) = y^3 \geq 0$. Tedy tam nemůže být minimum.

Úsečky tvaru $(x, 3)$, kde $x \in [0, 3]$, a $(3, y)$, kde $y \in [0, 3]$, budeme diskutovat níže.

- Uvažujme množinu $x \geq 3$, $y \leq 3$. Pak

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq x^3 - 3xy \geq 3x(3 - y) \geq 0.$$

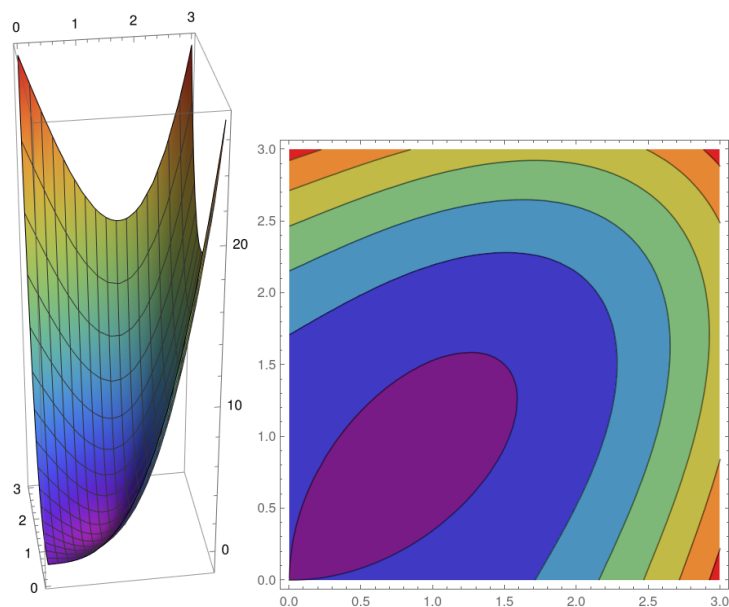
Analogicky pro $y \geq 3$, $x \leq 3$:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq y^3 - 3xy \geq 3y(3 - x) \geq 0.$$

Nakonec pro množinu $x \geq 3$, $y \geq 3$ je

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq 3(x^2 - xy + y^2) = 3((x - y)^2 + xy) \geq 0.$$

- Tedy minimum na množině K je v bodě $[1, 1]$ a má hodnotu -1 . Na $M \setminus K$ platí, že $f(x, y) \geq 0$.
- Závěr: globální maximum funkce nemá, globální minimum je v bodě $[1, 1]$ a má hodnotu -1 .



(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

Řešení: Zdroj příkladu: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/>
Hledáme globální extrémy na množině $M = \mathbb{R}^2$.

Funkci lze psát jako $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, pro $g(t) = te^{-t}$. (Vrstevnicemi funkce jsou kružnice se středem v počátku.)

Stačí tedy vyšetřit extrémy funkce $g(t)$, $t \in [0, \infty)$.

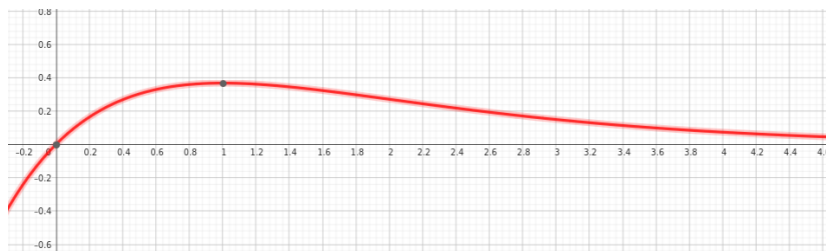
Zderivujeme:

$$g'(t) = e^{-t}(1 - t).$$

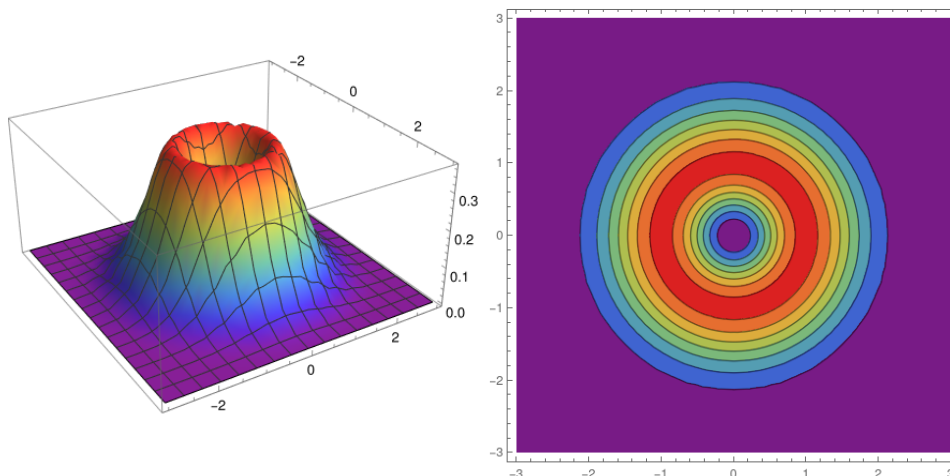
Funkce je tedy rostoucí na intervalu $[0, 1]$ a klesající na $[1, \infty)$. Navíc platí $g(0) = 0$ a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0.$$

Můžeme tedy funkci načrtnout a říct, že má globální maximum v $t = 1$ o hodnotě $1/e$ a minimum v $t = 0$ o hodnotě 0 .



Přechodem k funkci f určíme, že f má globální maximum na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ a minimum v počátku.



(c) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2 - 2y^2}$

Řešení: Zdroj: Petr Holický, Ondřej F. K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Funkce f je zřejmě nezáporná a zároveň $f(x, y) = 0$ právě pro $(x, y) = (0, 0)$. Zde je tedy globální minimum.
- Funkci zderivujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - 10x(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2 - 2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (14y - 4y(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2 - 2y^2}$$

Derivace jsou nulové právě tehdy, když

$$x(1 - 5(x^2 + 7y^2)) = 0$$

$$y(14 - 4(x^2 + 7y^2)) = 0$$

Z rovnic dostáváme řešení

- $[0, 0]$, $f(0, 0) = 0$,
- $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$, $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$,
- $[\pm 1/\sqrt{5}, 0]$, $f(\pm 1/\sqrt{5}, 0) = \frac{1}{5e}$.

Kandidátem na globální maximum jsou tedy body $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$, s hodnotou $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$.

- Ukážeme, že opravdu jde o body globálního maxima. Pro funkci f platí

$$f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2 - 2y^2} \leq 7(5x^2 + 2y^2)e^{-5x^2 - 2y^2}$$

Podobně jako v předchozím příkladě můžeme psát $h(x, y) = 7(5x^2 + 2y^2)e^{-5x^2 - 2y^2}$ jako $h(x, y) = g(5x^2 + 2y^2)$, kde $g(t) = 7te^{-t}$.

Máme $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$. Tedy existuje $R > 0$ takové, že pro $t \geq R$ platí $g(t) < \frac{7}{4e}$.

Uvažujme tedy množinu $K = \{[x, y] : 5x^2 + 2y^2 \leq R\}$ a množinu $\hat{K} = \{[x, y] : 5x^2 + 2y^2 \geq R\}$.

- Pak na $\widehat{K}$ platí

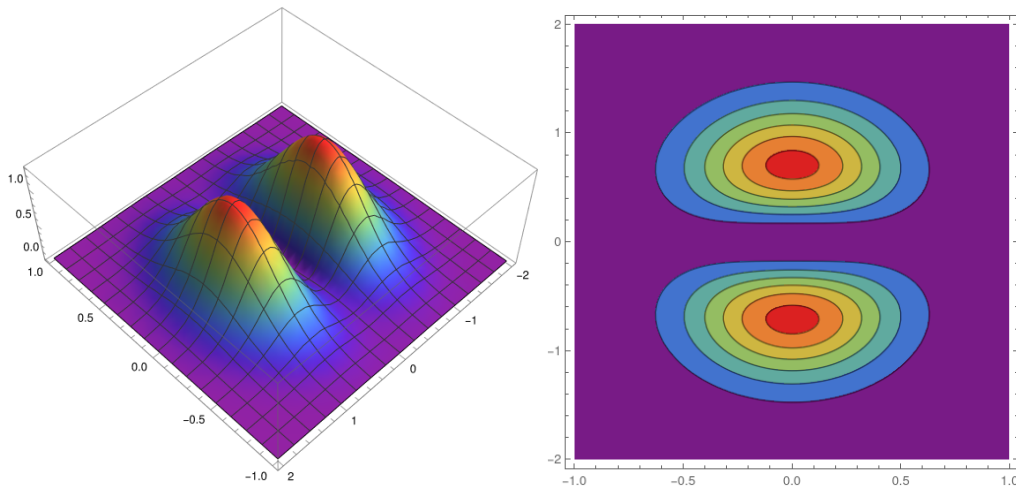
$$f(x, y) \leq h(x, y) < \frac{7}{4e}.$$

- Na množině K máme: K je kompakt (elipsa se středem v počátku) a f je na K spojitá. Nabývá tam tedy extrémů.

Globální maximum může být pouze v bodech $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$, s hodnotou $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$, nebo na hranici K . Ale pro body na hranici K platí, že $f < \frac{7}{4e}$.

Závěr: Funkce f nabývá globálního maxima v bodech $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$, s hodnotou $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$.

Globálního minima nabývá v bodě $[0, 0]$ s hodnotou 0.



(d) $f(x, y) = 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3}$, $M = (0, \infty)^2$

Řešení: Zdroj příkladu: <https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf>

- Funkce je na M nezáporná. Zároveň je shora neomezená, protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x + \frac{4}{x^2} + 27 = \infty.$$

- Zderivujeme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3 - \frac{8y}{x^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{4}{x^2} - \frac{81}{y^4} \end{aligned}$$

Jediným stacionárním bodem je bod $[2, 3]$, kde $f(2, 3) = 10$.

- Ukážeme, že v tomto bodě je globální minimum.

Uvažujme množinu $K = [\frac{3}{5}, 4] \times [1, 40]$. Pak máme

- Pro $x \geq 4$ je

$$f(x, y) > 3x \geq 12 > 10.$$

- Pro $x \in (0, 4]$, $y \geq 40$ je

$$f(x, y) > \frac{4y}{x^2} \geq \frac{y}{4} \geq 10$$

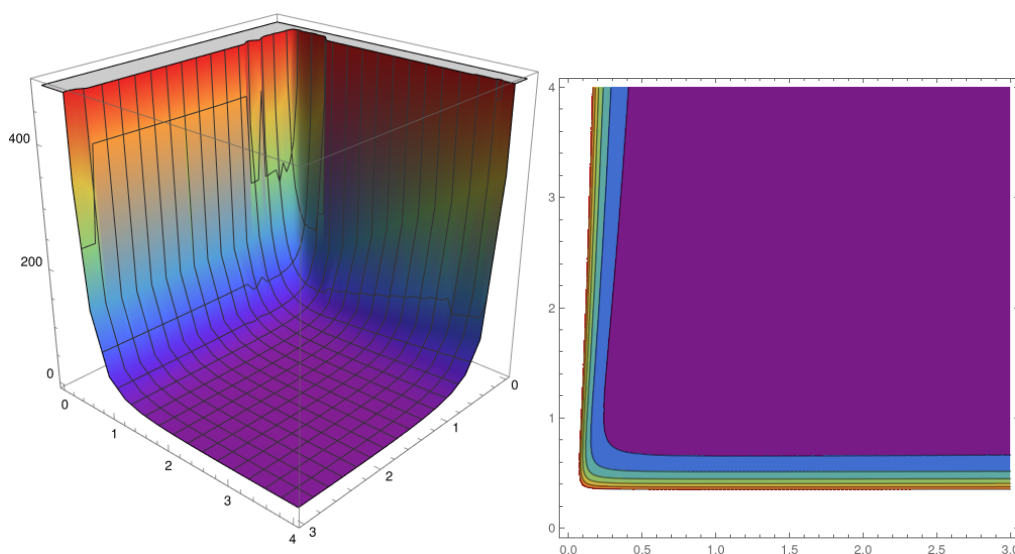
– Pro $y \in (0, 1]$ je

$$f(x, y) > \frac{27}{y^3} \geq 10$$

– Pro $y \geq 1, x \in (0, \frac{3}{5}]$ je

$$f(x, y) > \frac{4y}{x^2} \geq \frac{4}{x^2} \geq 10$$

Závěr: Globální minimum je v bodě $[2, 3]$ s hodnotou $f(2, 3) = 10$.



(e) $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}, x > 0, y > 0$.

Řešení:

Zdroj: Petr Holický, Ondřej F. K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

Položme $M = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

- Zderivujeme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (-7x - 10y + 7)e^{-x-y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (-7x - 10y + 10)e^{-x-y} \end{aligned}$$

Stacionární bod funkce nemá.

- Protože f je spojitá na $\overline{M}$, tak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Budeme tedy dále pracovat na $\overline{M} = [0, \infty) \times [0, \infty)$.

Zřejmě $f \geq 0$ na $\overline{M}$. Navíc $f(x, y) = 0$ právě pro $(x, y) = (0, 0)$. Tedy v počátku má f globální minimum.

Pro M pak platí $\inf f(M) = 0$.

- Vyšetříme chování f na hranici M .

– Máme $f(0, 0) = 0$.

– Na $(x, 0)$, kde $x > 0$ je

$$f(x, 0) = h_1(x) = 7xe^{-x}$$

Je

$$h'_1(x) = 7(1-x)e^{-x}.$$

Podezřelým bodem je tedy $[1, 0]$ s hodnotou $f(1, 0) = 7/e$.

– Na $(0, y)$, kde $y > 0$ je

$$f(0, y) = h_2(y) = 10ye^{-y}$$

Je

$$h'_2(y) = 10(1-y)e^{-y}.$$

Podezřelým bodem je tedy $[0, 1]$ s hodnotou $f(0, 1) = 10/e$.

- Ukážeme že f nabývá maxima na $\overline{M}$ bodě $[0, 1]$ s hodnotou $10/e$.

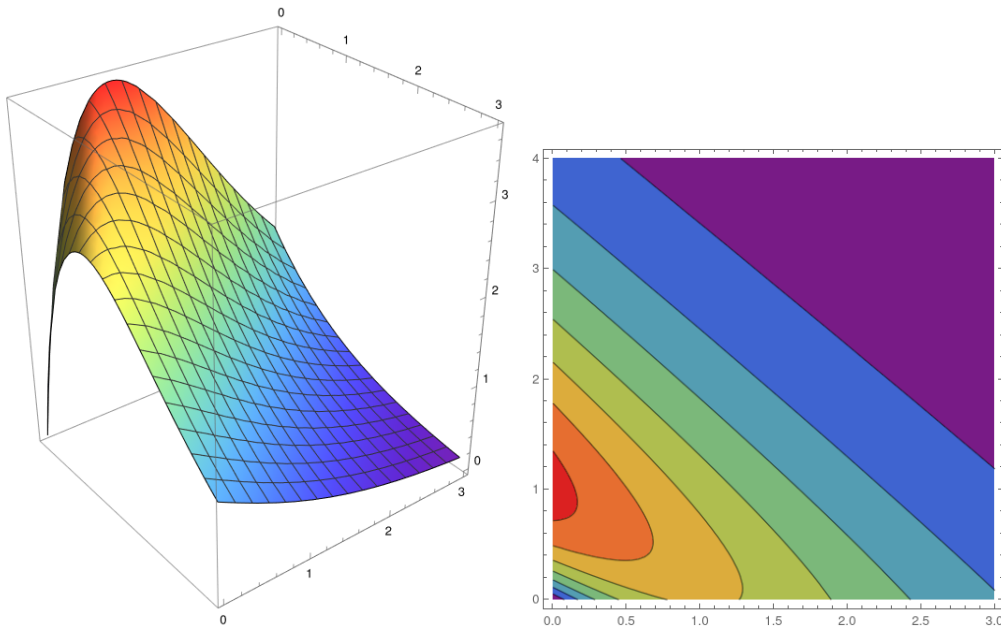
– Platí odhad

$$f(x, y) \leq 10(x+y)e^{-x-y}$$

Můžeme psát jako $10(x+y)e^{-x-y} = g(x+y)$, kde $g(t) = 10te^{-t}$. Protože $\lim_{t \rightarrow \infty} = 0$, tak existuje takové $R > 0$, že pro $t \geq R$ je $10te^{-t} < \frac{5}{e}$. Neboli $f(x, y) < \frac{5}{e}$ na množině $\{[x, y] : x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq R\}$.

- Uvažujme nyní množinu $A = \{[x, y] : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq R\}$. Jde o trojúhelník, množina je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f na ní tedy nabývá extrémů. Zřejmě $[0, 0] \in A$ i $[0, 1] \in A$. Z výpočtů výše plyne, že extrémy jsou v bodech $[0, 0]$ a $[0, 1]$.

Závěr: $\inf f(M) = 0$, $\sup f(M) = \frac{10}{e}$. Funkce na M nenabývá extrémů.



Zkouškové příklady

2. (a) Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 9xyz - 2x - 2y - 2z.$$

Nalezněte všechny body lokálních extrémů funkce f na množině $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda existují body globálních extrémů funkce f na $\mathbb{R}^3$ a pokud ano, nalezněte je.

- (b) Nalezněte $\sup f(M)$ a $\inf f(M)$, kde $f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 - x + y - y^2)$ a $M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$.
- (c) Necht' $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + 1\}$ a $B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 3\}$. Nalezněte $\text{dist}(A, B)$.
- (d) Necht' $q \in \mathbb{R}$ a $f_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako

$$f_q(x, y, z) = y^2 + z(y - 1) + z^2 + qz(y + 1) + q^2z^2 + x(x + 2y).$$

Ukažte, že existuje $q_0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro $q > q_0$ nemá f_q lokální extrém.

2a

A4

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 9xyz - 2x - 2y - 2z.$$

lokalní extrémy, globální extrémy na $\mathbb{R}^3$

Řešení. Plach

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6x + 9yz - 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6y + 9xz - 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 6z + 9xy - 2 \quad \text{pro } [x, y, z] \in \mathbb{R}^3.$$

Předpokládáme, že $[x, y, z]$ je stacionární bod f . Potom

$$(1) \quad 6x + 9yz - 2 = 0$$

$$(2) \quad 6y + 9xz - 2 = 0$$

$$(3) \quad 6z + 9xy - 2 = 0.$$

Odečtením (1) - (2) dostaneme

$$6(x - y) + 9(y - x)z = 0,$$

$$\text{tedy} \quad (x - y)(2 - 3z) = 0,$$

takže buď $x = y$ nebo $z = \frac{2}{3}$.

Odečtením (2) - (3) dostaneme obdobně, že

$$(4) \quad (y - z)(2 - 3x) = 0,$$

takže buď $y = z$ nebo $x = \frac{2}{3}$.

(a) Předpokládejme, že $x=y$. Potom z (4) plyne

$$(y-z)(2-3y)=0,$$

a tedy buď $y=z$ nebo $y=\frac{2}{3}$.

(a1) Je-li $y=z$, pak $x=y=z$ a z (1) plyne

$$9x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$\text{tedy } x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 72}}{18} = \frac{-6 \pm 6\sqrt{3}}{18} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

Tedy dostáváme stacionární body

$$A = \frac{-1-\sqrt{3}}{3} [1, 1, 1] \quad \text{a} \quad B = \frac{-1+\sqrt{3}}{3} [1, 1, 1].$$

(a2) Je-li $y=\frac{2}{3}$ (a $x=y$), pak $x=y=\frac{2}{3}$,

a tedy z (3) plyne $6z + 4 - 2 = 0$, tedy $z = -\frac{1}{3}$.

Dostáváme stacionární bod

$$C = \frac{1}{3} [2, 2, -1].$$

(b) Nyní předpokládejme, že $z=\frac{2}{3}$. Potom

z (4) plyne, že buď $y=z=\frac{2}{3}$ nebo $x=\frac{2}{3}$.

V prvním případě plyne z (1), že $x=-\frac{1}{3}$, ve druhém

případě plyne z (2), že $y=-\frac{1}{3}$. Dostáváme tedy stacionární body

$$D = \frac{1}{3} [2, -1, 2] \quad \text{a} \quad E = \frac{1}{3} [-1, 2, 2].$$

Funkce f má tedy právě pět stacionárních

bodů, a to body A, B, C, D, E .

Protože $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, existuje a každému bodu $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ derivace $f''(x, y, z)$ a je reprezentována Hessianou matricí

$$\begin{pmatrix} 6 & 9z & 9y \\ 9z & 6 & 9x \\ 9y & 9x & 6 \end{pmatrix}.$$

Pro subdeterminanty D_1, D_2, D_3 platí

$$D_1 = 6, \quad D_2 = 36 - 81z^2 = 9(4 - 9z^2),$$

$$D_3 = 6^3 + 2 \cdot 9^3 xyz - 6 \cdot 9^2 (x^2 + y^2 + z^2).$$

Vypočítáme hodnoty subdeterminantů ve stacionárních bodech A-E:

$$A = \frac{-1-\sqrt{3}}{3} [1, 1, 1]$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 6, \quad D_2 = 9 \left(4 - \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right) \\ &= 9 \left(4 - (\sqrt{3}+1)^2 \right) < 0, \end{aligned}$$

$$D_3 = 6^3 - 2 \cdot 9^3 (\sqrt{3}+1)^3 - 6 \cdot 9^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{3} \right)^2$$

$$= 6^3 - 2 \cdot 27 (3+1)^3 - 2 \cdot 81 \cdot (\sqrt{3}+1)^2$$

$$= 6^3 - 54 (\sqrt{3}+1)^3 - 162 (\sqrt{3}+1)^2 < 0,$$

tedy $f''(A)$ je indefinitu' kvadraticho' forma,
a tedy f nema' v A extre'm.

$$\underline{B = \frac{-1+\sqrt{3}}{3} [1,1,1]}$$

$$D_1 = 6, D_2 = 9 \left(4 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{3} \right)^2 \right) = 9 \left(4 - (\sqrt{3}-1)^2 \right) > 0,$$

$$D_3 = 6^3 + 2 \cdot 9^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{3} \right)^3 - 6 \cdot 9^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{3} \right)^2$$

$$= 6^3 + 2 \cdot 3^3 (\sqrt{3}-1)^3 - 6 \cdot 9 \cdot 3 (\sqrt{3}-1)^2$$

$$= 6^3 + 2 \cdot 3^3 (\sqrt{3}-1)^2 (\sqrt{3}-4)$$

$$= 2 \cdot 3^3 (2^2 + (\sqrt{3}-1)^2 (\sqrt{3}-4)),$$

pricemz

$$(\sqrt{3}-1)^2 (\sqrt{3}-4) = (1-2\sqrt{3}) (\sqrt{3}-4) = 4\sqrt{3} - 6 - 6 + 8\sqrt{3}$$

$$= -22 + 12\sqrt{3},$$

takze

$$2^2 + (\sqrt{3}-1)^2 (\sqrt{3}-4) = -18 + 12\sqrt{3} > 0,$$

$$\text{nebat} \quad \sqrt{3} > \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad 3 > \frac{9}{4}.$$

Tedy $D_3 > 0$, forma $f''(B)$ je pozitivne'
definitu', a f ma' v B este' lokals'
minimum.

$$\underline{C = \frac{1}{3} [2, 2, -1]}$$

$$D_1 = 6, \quad D_2 = 9 \left(4 - 9 \cdot \frac{1}{3^2} \right) = 27 > 0,$$

$$D_3 = 6^3 + 2 \cdot 9^3 \cdot \frac{-4}{3^3} - 6 \cdot 9^2 \left(\frac{4+4+1}{3^2} \right)$$

$$= 6^3 - 8 \cdot 3^3 - 6 \cdot 9^2$$

$$= 6 (6^2 - 4 \cdot 3^2 - 9^2) < 0,$$

takže $f''(C)$ je indefinitní, a tedy f nemá v C extrém.

$$\underline{D = \frac{1}{3} [2, -1, 2], \quad E = \frac{1}{3} [-1, 2, 2]}$$

$$D_1 = 6, \quad D_2 = 36 - 81 \cdot \frac{4}{9} = 36 - 36 = 0$$

$$D_3 = 6^3 + 2 \cdot 9^3 \cdot \frac{-4}{3^3} - 6 \cdot 9^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= 6^3 - 8 \cdot 27 - 6 \cdot 9^3 < 0,$$

takže $f''(D)$ a $f''(E)$ jsou indefinitní, tedy f nemá v E, F extrémy.

Jediným bodem lokálního extrému je tedy bod $B = \frac{\sqrt{3}-1}{2} [1, 1, 1]$, kde má f lokální minimum.

Protože $f(x, 0, 0) = 3x^2 - 2x$ pro $x \in \mathbb{R}$, platí

$$\sup f \geq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0, 0) = \infty.$$

Protože $f(x, x, -1) = -3x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, platí

$$\inf f \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, x, -1) = -\infty.$$

Funkce f tedy nemá globálních extrémů.

HODNOCENÍ

$\nabla f(x, y, z)$ 1

stacionární body 5

existence f'' , Hessián 1

vyšetření povahy stacionárních bodů 5

$\sup f$, $\inf f$ 2

nexistence globálních extrémů 1

(25)

$$\text{Pocitajmo } f(x, y, z) = e^{-z^2} (x^2 - x + y - y^2)$$

$$[x, y, z] \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}.$$

$$\text{Najmo } g(x, y) = x^2 - x + y - y^2, [x, y] \in [-1, 1]^2$$

$$\text{Pak: } \nabla g = (2x - 1, 1 - 2y) = 0 \Leftrightarrow [x, y] = [1/2, 1/2] \quad (+2)$$

$$\cdot \text{ Limes: } \cdot y = 1, x \in [-1, 1]: h(x) = x^2 - x \Rightarrow h'(x) = 2x - 1$$

$$\Rightarrow [-1/2, 1], [-1, 1], [1, 1]$$

$$\cdot y = -1, x \in [-1, 1]: h(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow h'(x) = 2x - 1$$

$$\Rightarrow [1/2, -1], [-1, -1], [1, -1]$$

$$\cdot x = 1, y \in [-1, 1]: h(y) = y - y^2 \Rightarrow h'(y) = 1 - 2y \quad (+6)$$

$$\Rightarrow [1, 1/2], [1, -1], [1, 1]$$

$$\cdot x = -1, y \in [-1, 1]: h(y) = 2 + y - y^2 \Rightarrow h'(y) = 1 - 2y$$

$$\Rightarrow [-1, 1/2], [-1, 1], [-1, -1]$$

b.d.

h.o.d.a = t.g.

$$[-1, 1] \dots 2$$

$$[-1, -1] \dots 2 + (-1) - (-1) = 0$$

$$[1, -1] \dots -2$$

$$[1, 1] \dots 0$$

$$[1/2, 1] \dots 1/4 - 1/2 = -1/4$$

$$[1/2, -1] \dots 1/4 - 1/2 - 1 - 1 = -2 - 1/4 = -9/4$$

$$[1, 1/2] \dots 1/2 - 1/4 = 1/4$$

$$[-1, 1/2] \dots 2 + 1/2 - 1/4 = 2 + 1/4 = 9/4$$

$$[1/2, 1/2] \dots 1/4 - 1/2 + 1/2 - 1/4 = 0$$

$$\Rightarrow \max g([-1, 1]^2) = 9/4$$

$$\min g([-1, 1]^2) = -9/4$$

(4)

$$[x, y, z] \in [-1, 1]^2 \times \mathbb{R}, \text{ pak } f(x, y, z) = e^{-z^2} g(x, y) \text{ gdje } e^{-z^2} \in [0, 2],$$

$$\text{tedy: } \sup f(x, y, z) = \frac{9}{4}$$

$$\inf f(x, y, z) = -\frac{9}{4}$$

$$-\frac{9}{4} \leq -\frac{9}{4} e^{-z^2} \leq f(x, y, z) \leq e^{-z^2} \cdot \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}, \quad (+4)$$

(2c) $A = \{x = y^2 + 1\}$ $B = \{y = 2x + 3\}$

Tedy mólom body : $[y^2 + 1, y]$, $y \in \mathbb{R}$

$$[x, 2x + 3], x \in \mathbb{R}$$

Dim: nalitujeme vzdálenost, kdy $\text{dist}^2(a, b)$:

$f(x, y) = (y^2 + 1 - x)^2 + (y - 2x - 3)^2$ ~~Nová~~ hledáme minimum.
 $\text{po } f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y^2 + 1 - x)(-1) + 2(y - 2x - 3)(-2) \\ 2(y^2 + 1 - x)2y + 2(y - 2x - 3)(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (y^2 + 1 - x)(-1) + 2(y - 2x - 3) = 0 \quad (+3)$$

$$2(y^2 + 1 - x)2y + 2(y - 2x - 3) = 0$$

$$(y^2 + 1 - x)(4y - 1) = 0$$

I. $y^2 + 1 - x = 0 \Rightarrow y = 2x + 3 \Rightarrow 1 - x + (2x + 3)^2 = 0$

$$4x^2 + 5x + 10 = 0$$

(+2)

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4 \cdot 10}}{8} \quad \text{není reálné}$$

II. $y = 1/4$, $x = y^2 + 1 = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16} \Rightarrow a = [\frac{17}{16}, \frac{1}{4}] \in A$

$$(\frac{17}{16} + 1 - x)(-1) - 2(\frac{1}{4} - 2x - 3) = 0$$

$$x - \frac{17}{16} = \frac{1}{2} + 4x + 6 = 0$$

(+5)

$$5x = \frac{17}{16} + \frac{1}{2} - 6 = \frac{17 + 8 - 96}{16} = -\frac{71}{16}$$

$$x = -\frac{71}{80} \quad y = 2x + 3 = -\frac{71}{40} + 3 = \frac{-71 + 120}{40} = \frac{49}{40}$$

$$b = [-\frac{71}{80}, \frac{49}{40}]$$

Děnáme $d = \text{dist}(a, b) = \sqrt{(\frac{17}{16} + \frac{71}{80})^2 + (\frac{1}{4} - \frac{49}{40})^2}$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x,y) = \infty, \quad (y^2 + 1 - x)^2 + (y - (2x + 3))^2 =$$

$$= y^4 + (1-x)^2 + 2y^2(1-x) + y^2 + (2x+3)^2 - 2y(2x+3)$$

$$= y^4 + \underline{1} - \underline{2x} + \underline{1} + \underline{2y^2} - \underline{2y^2x} + \underline{y^2} + \underline{4x^2} + \underline{9} + \underline{12x} - \underline{4yx} - \underline{6y}$$

$$= y^4 + 3y^2 + 5x^2 + 10x + 10 - 2y^2x - 4yx - 6y \geq$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a^2 + b^2)$$

$$yx \leq \frac{y^2 + x^2}{2}$$

$$y^2x \leq \frac{y^4 + x^2}{2}$$

$$4yx \leq 2y^2 + 2x^2$$

$$2y^2x \leq y^4 + x^2$$

$$-4yx \geq -2y^2 - 2x^2$$

(+3)

$$-2y^2x \geq -y^4 - x^2$$

$$\geq y^4 + 3y^2 + 5x^2 + 10x + 10 - 6y - y^4 - x^2 - 2y^2 - 2x^2$$

$$= y^2 + 2x^2 + 10x - 6y + 10 \geq (y^2 - 6y) + (2x^2 + 10x) \xrightarrow{|x|, |y| \rightarrow \infty} \infty$$

$$\bullet A \in \mathbb{R}^n, R > 0, \text{ za } |x| \geq R, |y| \geq R \text{ plat } f(x,y) > d^2$$

Pač f najbve minime na $[-R, R] \times [-R, R]$, a to uun: tr
(na granici je $f > d^2$). Tedy mus platit $\nabla f = 0$ v bijelim bodu

hnožij $(-R, R) \times (-R, R)$ a ki je poutejeden. Tedy v tomto bodu

najbve f minima. Proto se vedlechnost A, B nabyva. (+3)

(2d) $f_9 = y^2 + z(y-1) + z^2 + q^2(y+1) + q^2 z^2 + x(x+2y)$

$\nabla f_9 = (2x+2y, 2y+z+q^2+2x, y-1+2z+q^2(y+1)+2q^2 z) \quad (+3)$

$\nabla f_9 = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow z + q^2 z = 0 \xrightarrow{z=0} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} z=0 \\ q=-1 \end{matrix}$ Es sind nur $q = -1$ & $q = 1$

$\rightarrow y-1+q(y+1) = 0 \rightarrow x = \frac{q-1}{q+1}$

$y(1+q) + q^{-1} = 0$
 $y = \frac{1-q}{1+q}$

$\Rightarrow \left[\frac{q-1}{q+1}, \frac{1-q}{1+q}, 0 \right] \quad (+4)$

$H_9'' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1+q \\ 0 & 1+q & 2+2q^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow - \\ \\ \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+q \\ 0 & 1+q & 2+2q^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+q \\ 0 & 1+q & 2+2q^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \uparrow + \\ \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+q & 2q^2+q+3 \\ 0 & 1+q & 2+2q^2 \end{pmatrix} \xleftarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2q^2+2q+3 & 2q^2+q+3 \\ 0 & 2q^2+q+3 & 2+2q^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2q^2+2q+5 & 2q^2+q+3 \\ 2q^2+q+3 & 2+2q^2 \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{1}{2q^2+2q+5} (2q^2+q+3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2q^2+2q+5 & 2q^2+q+3 \\ 0 & 2+2q^2 - \frac{(2q^2+q+3)^2}{2q^2+2q+5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2q^2+2q+5 & 0 \\ 0 & -\frac{q^2+2q+1}{2q^2+2q+5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2+2q^2)(2q^2+2q+5) - (2q^2+q+3)^2} = \\ & = \left(\cancel{4q^2} + \cancel{4q} + 8 + \cancel{4q^3} + \cancel{4q^2} + \cancel{8q} - \cancel{4q^4} - \cancel{2q^3} - \cancel{6q^2} - \cancel{2q} - \cancel{q^2} - \cancel{3q} - 9 \right) \end{aligned}$$

$$= -q^2 - 2q - 1$$

Náme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2q^2+2q+5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{q^2+2q+1}{2q^2+2q+5} \end{pmatrix}, \text{ kdy}$$

(+9)

pro q dostatečně velký máme indefinitní. Tedy
v přístrojích bodů není extrém.

Bonus

3. Ukažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina. Je to pravda pro spočetná sjednocení?

Množina $A \subset X$ je řídká v (X, ρ) , jestliže $X \setminus \overline{A}$ je hustá v X .

Množina $B \subset X$ je hustá v (X, ρ) , jestliže $\overline{B} = X$.

Řešení: Nechť A_1 a A_2 jsou řídké množiny v (X, ρ) . Pak pro $A_1 \cup A_2$ máme

$$X \setminus (\overline{A_1 \cup A_2}) = X \setminus (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = (X \setminus \overline{A_1}) \cap (X \setminus \overline{A_2})$$

Navíc platí, že $(X \setminus \overline{A_1})$ i $(X \setminus \overline{A_2})$ je otevřená a hustá množina. Z věty z přednášky platí, že průnik takových dvou množin je také hustá množina. Tedy $A_1 \cup A_2$ je řídká množina.

Indukcí lze ukázat, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina.

Pro spočetné sjednocení tvrzení neplatí. Uvažujme jednoprvkové množiny $\{q\}$, kde $q \in \mathbb{Q}$. Množiny jsou zjevně řídké v $\mathbb{R}$. Ale jejich spočetné sjednocení je celé $\mathbb{Q}$, což řídká množina není.