



11. cvičení – Extrémy na neomezené množině

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Poznámka 1. Nechť f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Poznámka 2. Nechť K je neprázdňá kompaktní množina v metrickém (pod)prostoru X . Nechť navíc $\text{int } K \subset X$. Nechť funkce f je spojitá na K a nechť existuje $x_0 \in \text{int } K$ tak, že

$$x \in \partial K \cup (X \setminus K) \implies f(x) > f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) < f(x_0)).$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\text{int } K$.

Globální extrémy:

(Ne vždy je nutné projít všechny odrážky a ne vždy v tomto pořadí.)

1. **Prohlédneme** si funkci. Jaký má definiční obor? Je nezáporná? Jaké asi budou limity v krajích D_f ?
2. **Zderivujeme** funkci na vnitřku množiny a najdeme podezřelé body.
3. Odhadneme limity v krajích definičního oboru.
 - (a) Typicky jak se funkce chová v **nekonečnu**. (Např. jak se funkce chová na přímkách $y = 0$, $x = 0$.)
 - (b) Jak se funkce chová na **hranici**.
4. Pokud to vypadá, že funkce **globální extrémy nemá** (např. jde někde do nekonečna), tak za pomoci **limit** najdeme supremum/infimum.
5. Pokud to vypadá, že v místech **lok. extrémů jsou i globální**, tak:
 - (a) Najdeme **kompakt**, který obsahuje tyto podezřelé body. Spojitá funkce na kompaktu musí nabývat extrémů.
 - (b) Ukážeme, že **mimo kompakt** je funkce menší než maximum (a větší než minimum). Tady pomůže vhodná volba kompaktu, znalost limit a obvyklé odhady.

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):

(a) $\ast f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$, $M = [0, \infty)^2$.

(b) $\otimes f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$



- (c) ♣ $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2 - 2y^2}$
- (d) ⌘ $f(x, y) = 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3}$, $M = (0, \infty)^2$
- (e) $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}$, $x > 0$, $y > 0$.

Zkouškové příklady

Zdroje příkladů i s řešením: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/>
<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/edu.php>

2. (a) Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 9xyz - 2x - 2y - 2z.$$

Nalezněte všechny body lokálních extrémů funkce f na množině $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda existují body globálních extrémů funkce f na $\mathbb{R}^3$ a pokud ano, nalezněte je.

- (b) Nalezněte $\sup f(M)$ a $\inf f(M)$, kde $f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 - x + y - y^2)$ a $M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$.
- (c) Necht' $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + 1\}$ a $B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 3\}$. Nalezněte $\text{dist}(A, B)$.
- (d) Necht' $q \in \mathbb{R}$ a $f_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako

$$f_q(x, y, z) = y^2 + z(y - 1) + z^2 + qz(y + 1) + q^2z^2 + x(x + 2y).$$

Ukažte, že existuje $q_0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro $q > q_0$ nemá f_q lokální extrém.

Bonus

3. Ukažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina. Je to pravda pro spočetná sjednocení?

Množina $A \subset X$ je řídká v (X, ρ) , jestliže $X \setminus \overline{A}$ je hustá v X .

Množina $B \subset X$ je hustá v (X, ρ) , jestliže $\overline{B} = X$.

(1a) Hint: $x \geq 3, y \leq 3: f(x, y) \geq x^3 - 3xy \geq 3x(3 - y) \geq 0$, Hint: $x \geq 3, y \geq 3: f(x, y) \geq 3(x^2 - y^2) \geq 3(x - y)(x + y) \geq 0$

(1b) Hint: Jak se chová funkce te^{-t} ?

(1c) Hint: Lze se nějakými odhady dostat k funkci te^{-t} ?

(1d) Uvažujte množinu $K = [\frac{5}{3}, 4] \times [1, 40]$ a její doplněk.

