



10. cvičení – Extrémy na množině 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Poznámka 1. Nechť f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Poznámka 2. Nechť K je neprázdň kompaktní množina v metrickém (pod)prostoru X . Nechť navíc $\text{int } K \subset X$. Nechť funkce f je spojitá na K a nechť existuje $x_0 \in \text{int } K$ tak, že

$$x \in \partial K \cup (X \setminus K) \implies f(x) > f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) < f(x_0)).$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\text{int } K$.

Algoritmus: Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina **uzavřená**, tak odůvodníme, že **spojitá funkce na kpt.** nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
 - (a) na **vnitřku** množiny jen v místech s **nulovými derivacemi** (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
 - (b) v bodech vnitřku, kde **neexistuje derivace**;
 - (c) na **hranici**: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a výraz zjednodušit.
 - (d) na **hranici hranice**: krajní body, hroty trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body **sepíšeme** a **porovnáme** jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.
4. Pokud množina **není uzavřená**, tak ji prve **uzavřeme** a vyšetříme jako kompaktní. Pokud je extrém na její hranici (mimo množinu), tak funkce tento extrém nemá - ale bude to její **supremum/infimum**

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):

- (a) $f(x, y) = \sin x + \sin y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$
- (b) $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
- (c) $f(x, y, z) = x - y + 2z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + z^2 < y\}$
- (d) $f(x, y, z) = x + y + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x < 0\}$
- (e) $f(x, y) = -x^4 - y^4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 > 1\}$

Zkouškové příklady

2. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):

- (a) $f(x, y, z) = \arctan(x^2)(y^2 + yz + z^2)$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4, x \in [-1, 1]\}$
- (b) $f(x, y, z) = x + 2y - z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, -x + 2y + z \geq 0\}$
- (c) $f(x, y, z) = \arctan(xyz)$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- (d) Nalezněte normu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kde norma matice je definována jako

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$$

Bonus

3. Ukažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina. Je to pravda pro spočetná sjednocení?

Množina $A \subset X$ je řídká v (X, ρ) , jestliže $X \setminus \overline{A}$ je hustá v X .

Množina $B \subset X$ je hustá v (X, ρ) , jestliže $\overline{B} = X$.

(2a) Lagrangeovy multiplikátory vedou na rovnici $\frac{x}{\cos x} = \frac{t}{\cos t}$. Ukažte, že funkce $\frac{t}{\cos t}$ je prostá na $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. (Náčrtněte hrubý graf - kde roste, kde klesá, limity v 0.)