

9. cvičení – Extrémy na množině

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

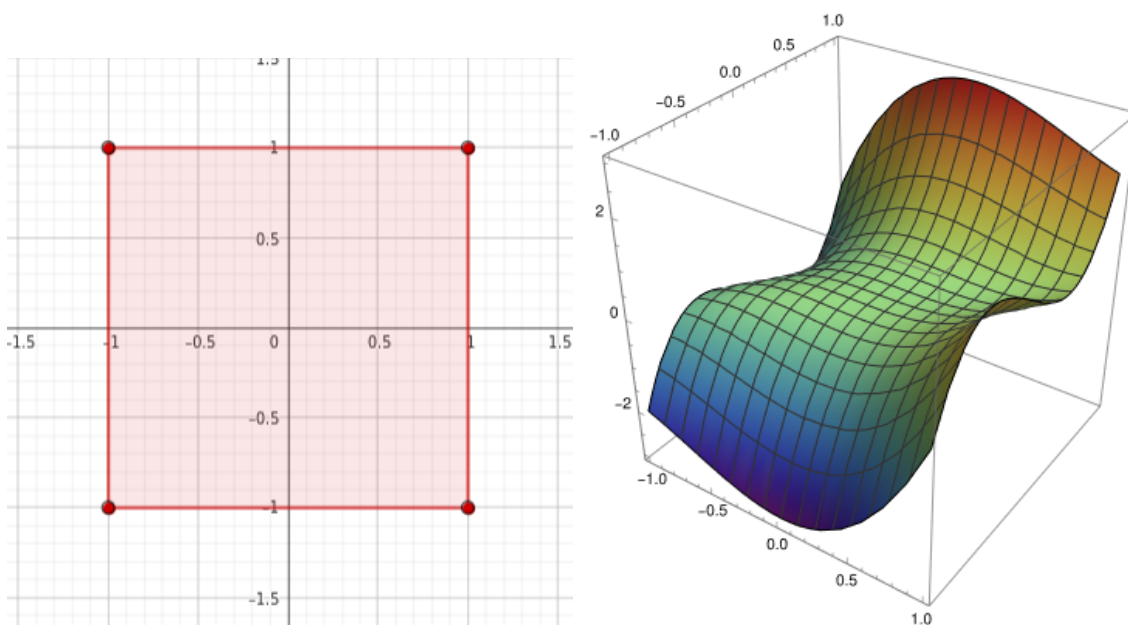
Příklady

1. Najděte extrémy funkcí na množině

(a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1; 1]^2$

Řešení: Příklad máme z <https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf>

- Množina M je čtverec s vrcholy $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$. Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená (součin dvou uzavřených intervalů) a omezená, tedy je kompaktní. Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $(-1, 1) \times (-1, 1)$. Parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 4xy, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x^2 + 9y^2.\end{aligned}$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0, 0)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f .
 - $y = -1$, $x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, -1) = x^3 + 2x^2 - 3.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x + 4)$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = -\frac{4}{3}$. Druhý bod neleží v M . Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, -1)$.

ii. $y = 1, x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, 1) = x^3 - 2x^2 + 3.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = \frac{4}{3}$. Druhý bod neleží v M . Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, 1)$.

iii. $x = -1, y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(-1, y) = 3y^3 - 2y - 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 9y^2 - 2$$

Nulové derivace jsou pro $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(-1, \frac{1}{3}\sqrt{2})$. a $(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{2})$.

iv. $x = 1, y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(1, y) = 3y^3 - 2y + 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 9y^2 - 2$$

Nulové derivace jsou pro $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(1, \frac{1}{3}\sqrt{2})$. a $(1, -\frac{1}{3}\sqrt{2})$.

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

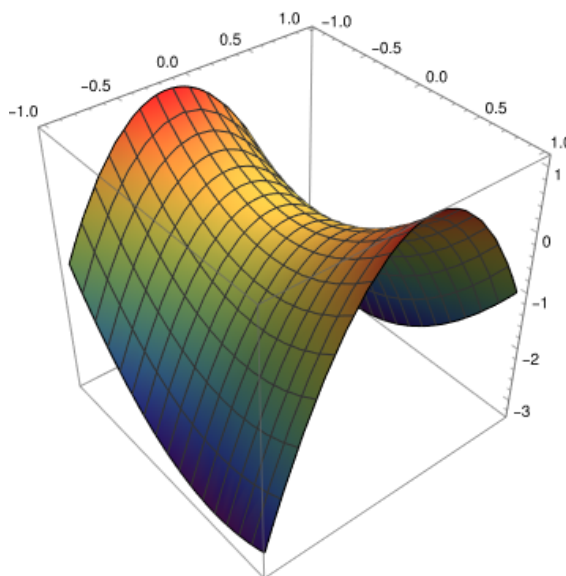
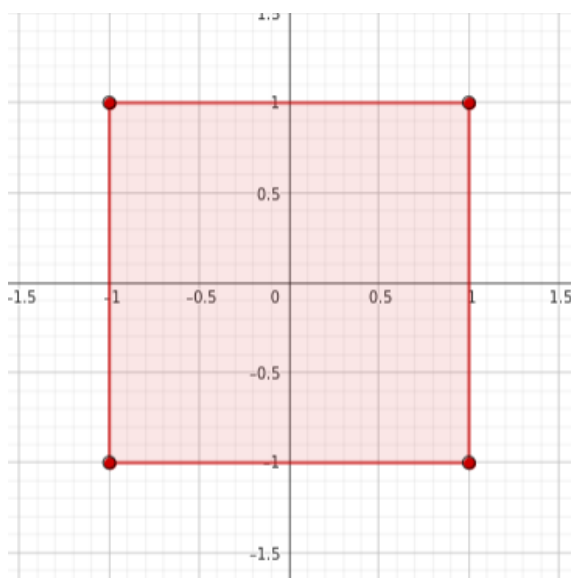
$$\begin{aligned}
 f(0,0) &= 0, \\
 f(-1,1) &= 0, \\
 f(1,1) &= 2, \\
 f(1,-1) &= 0, \\
 f(-1,-1) &= -2, \\
 f(0,1) &= 3, \\
 f(0,-1) &= -3, \\
 f(-1, \frac{1}{3}\sqrt{2}) &= -1 - \frac{4}{9}\sqrt{2} \\
 f(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{2}) &= \frac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \\
 f(1, \frac{1}{3}\sqrt{2}) &= 1 - \frac{4}{9}\sqrt{2} \\
 f(1, -\frac{1}{3}\sqrt{2}) &= 1 + \frac{4}{9}\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(0,1)$, $f(0,1) = 3$ a minimum v $(0,-1)$, $f(0,-1) = -3$.

(b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

Řešení: Příklad máme z Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Množina M je čtverec s vrcholy $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ a $(-1,1)$. Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená (součin dvou uzavřených intervalů) a omezená, tedy je kompaktní. Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $(-1, 1) \times (-1, 1)$. Parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6y + x\end{aligned}$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0, 0)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f .

- $y = -1, x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, -1) = x^2 - x - 3$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x - 1$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(\frac{1}{2}, -1)$.

- $y = 1, x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, 1) = x^2 + x - 3.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x + 1$$

Nulové derivace jsou pro $x = -\frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(-\frac{1}{2}, 1)$.

- $x = -1, y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(-1, y) = 1 - y - 3y^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = -1 - 6y$$

Nulové derivace jsou pro $y = -\frac{1}{6}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(-1, -\frac{1}{6})$.

- $x = 1, y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(1, y) = 1 + y - 3y^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 1 - 6y$$

Nulové derivace jsou pro $y = \frac{1}{6}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(1, \frac{1}{6})$.

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \\ f(-1, 1) &= -3, \\ f(1, 1) &= -1, \\ f(1, -1) &= -3, \\ f(-1, -1) &= -1, \\ f\left(\frac{1}{2}, -1\right) &= -\frac{13}{4}, \\ f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) &= -\frac{13}{4}, \\ f\left(-1, -\frac{1}{6}\right) &= \frac{13}{12}, \\ f\left(1, \frac{1}{6}\right) &= \frac{13}{12}, \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(1, \frac{1}{6})$ a $(-1, -\frac{1}{6})$ a má hodnotu $13/12$. Minimum v $(-\frac{1}{2}, 1)$ a $(\frac{1}{2}, -1)$ a má hodnotu $-13/4$.

(c) $f(x, y) = x + y$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$

Řešení: Příklad máme z Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Množina M je elipsa o středu v počátku.

Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: Jde o vzor uzavřené množiny A při spojitým zobrazení g , konkrétně $A = (-\infty, 1]$, $g(x, y) = 4x^2 + y^2$, pak

$$M = g^{-1}((-\infty, 1]).$$

Zároveň je M omezená:

$$x^2 + y^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 1.$$

Tedy je M kompaktní.

Tedy f na M nabývá extrémů.

- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $4x^2 + y^2 < 1$. Parciální derivace:

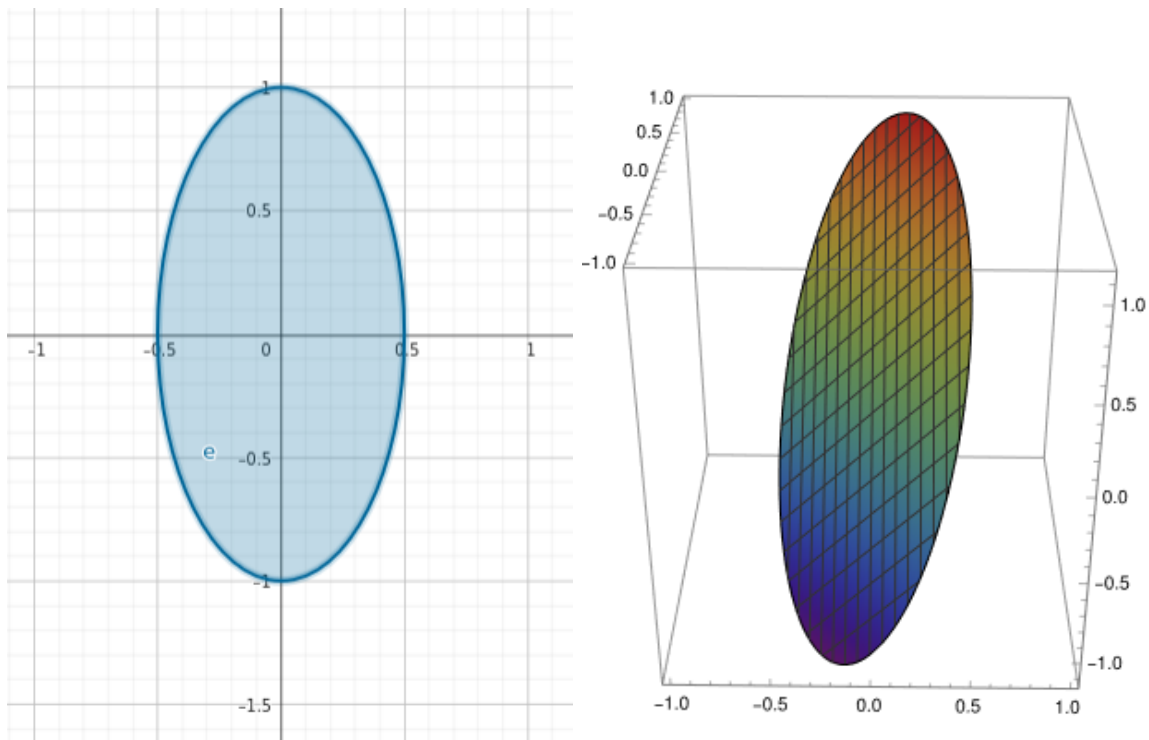
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Rovnice tedy nejsou nikde nulové a na vnitřku M nemáme žádný podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. To jsou body splňující $4x^2 + y^2 = 1$.

Hranici popíšeme pomocí polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cos t, \\ y &= \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$



Pak máme

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos t \right)^2 + \sin^2 t = 1$$

Dosadíme do funkce f . Tedy

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2} \cos t, \sin t\right) = \frac{1}{2} \cos t + \sin t.$$

Zderivujeme, abychom našli extrémy.

$$g'(t) = -\frac{1}{2} \sin t + \cos t.$$

Nulové body:

$$\sin t = 2 \cos t.$$

Protože $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, tak řešením je: $\sin t = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a $\cos t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ nebo $\sin t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ a $\cos t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Celkem tedy dostáváme podezřelé body $((x, y))$: $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

- Přidáme „hranici hranice“, tedy bod $t = 0, (\frac{1}{2}, 0)$
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) &= \frac{\sqrt{5}}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) &= -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a má hodnotu $\frac{\sqrt{5}}{2}$, minimum je v bodě $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ a má hodnotu $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(d) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$

Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

- Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(4, 4)$ a $(0, 4)$.
Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: jde o průnik tří polorovin, které jsou uzavřené množiny. Konkrétně:

$$M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} = g_1^{-1}([0, \infty)), \quad g_1(x, y) = x$$

$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4\} = g_2^{-1}((-\infty, 4]), \quad g_2(x, y) = y$$

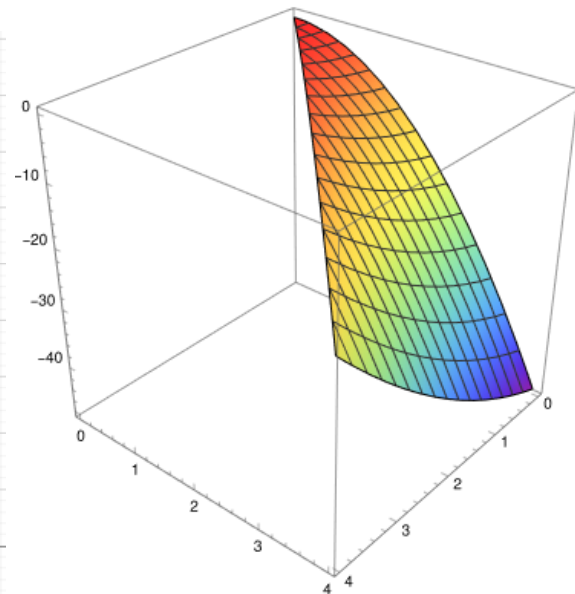
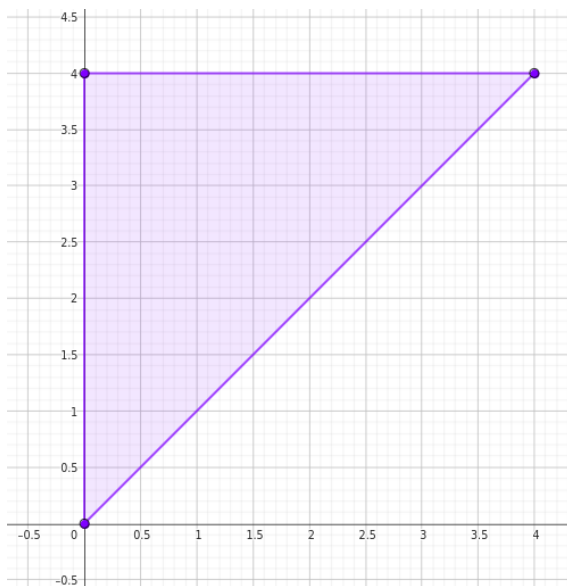
a

$$M_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\} = g_3^{-1}([0, \infty)), \quad g_3(x, y) = y - x$$

Tedy $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Průnik 3 uzavřených množin je uzavřená množina. Množina je zároveň omezená: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$.

Tedy je M kompaktní.

Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na vnitřku množiny. Parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6y + 18 \end{aligned}$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(\frac{1}{2}, 3)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 3 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f .

- i. $x = 0, y \in (0, 4)$. Máme

$$g(y) = f(0, y) = -3y^2 + 18y + 4$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = -6y + 18$$

Nulové derivace jsou pro $y = 3$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, 3)$.

- ii. $y = 4, x \in (0, 4)$. Máme

$$g(x) = f(x, 4) = x^2 - x + 28.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x - 1$$

Nulové derivace jsou pro $x = \frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(\frac{1}{2}, 4)$.

- iii. $y = x, x \in (0, 4)$. Máme

$$g(x) = f(x, x) = -2x^2 + 17x + 4$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = -4x + 17$$

Nulové derivace jsou pro $x = 17/4$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(17/4, 17/4)$, který ale neleží v M .

- Přidáme vrcholy trojúhelníka. Tedy podezřelé body: $(0, 0)$, $(4, 4)$ a $(0, 4)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 4, \\ f(4, 4) &= 40, \\ f(0, 4) &= 28, \\ f\left(\frac{1}{2}, 3\right) &= 123/4, \\ f\left(\frac{1}{2}, 4\right) &= 111/4, \\ f(0, 3) &= 31, \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(4, 4)$ a má hodnotu 40. Minimum v $(0, 0)$ a má hodnotu 4.

(e) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na M ,

kde M je čtverec s vrcholy $A = [2, 0]$, $B = [0, 2]$, $C = [-2, 0]$, $D = [0, -2]$

Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

- Množina M je čtverec postavený na špičku s vrcholy $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, a $(0, -2)$.

Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: jde o průnik dvou uzavřených množin. Konkrétně:

$$M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x - 2 \leq y \leq x + 2\} = g_1^{-1}([-2, 2]), \quad g_1(x, y) = y - x$$

a

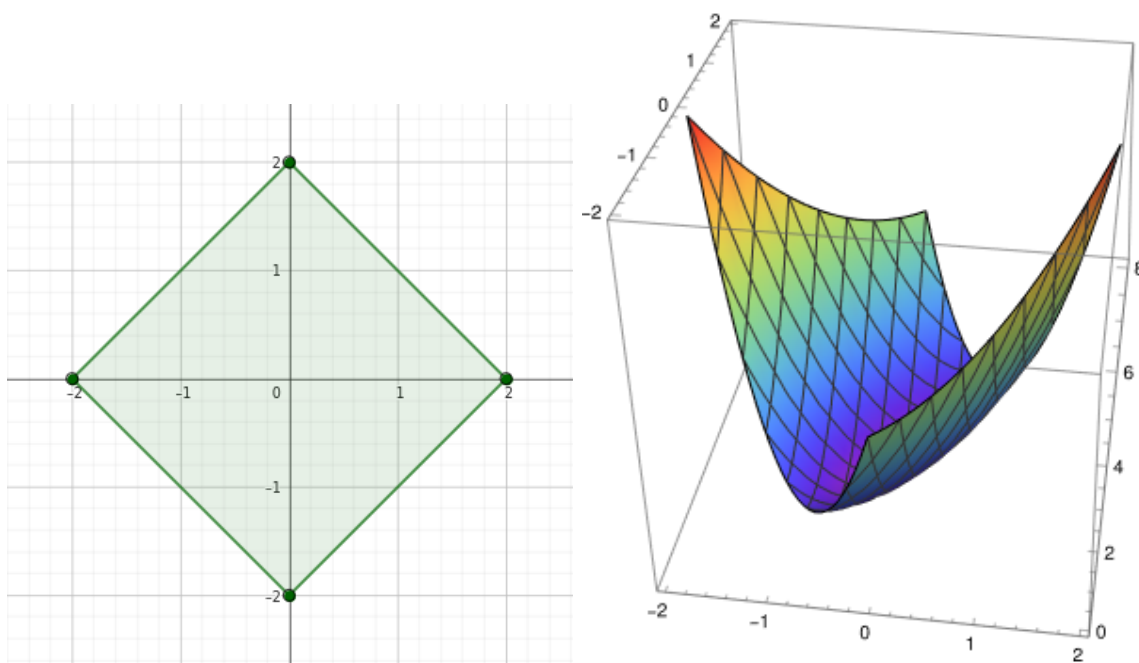
$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -x - 2 \leq y \leq -x + 2\} = g_2^{-1}([-2, 2]), \quad g_2(x, y) = y + x$$

Tedy $M = M_1 \cap M_2$. Průnik 2 uzavřených množin je uzavřená množina.

Množina je zároveň omezená: $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

Tedy je M kompaktní.

Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na vnitřku množiny. Parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x - 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x - 2y \end{aligned}$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0, 0)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f .

i. $y = -x + 2$, $x \in (0, 2)$. Máme

$$g(x) = f(x, -x + 2) = (2x - 2)^2 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 10x - 8$$

Nulové derivace jsou pro $x = 4/5$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(4/5, 6/5)$.

ii. $y = x + 2$, $x \in (-2, 0)$. Máme

$$g(x) = f(x, x + 2) = 4 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$. Tento bod neleží na vnitřku dané úsečky, tedy jej budeme uvažovat až později (jako vrchol čtverce).

iii. $y = -x - 2$, $x \in (-2, 0)$. Máme

$$g(x) = f(x, -x - 2) = (2x + 2)^2 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 10x + 8$$

Nulové derivace jsou pro $x = -4/5$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(-4/5, -6/5)$.

iv. $y = x - 2$, $x \in (0, 2)$. Máme

$$g(x) = f(x, x - 2) = 4 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$. Tento bod neleží na vnitřku dané úsečky, tedy jej budeme uvažovat až později (jako vrchol čtverce).

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, a $(0, -2)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$f(0, 0) = 0,$$

$$f(2, 0) = 8,$$

$$f(0, 2) = 4,$$

$$f(-2, 0) = 8,$$

$$f(0, -2) = 4,$$

$$f(4/5, 6/5) = 4/5,$$

$$f(-4/5, -6/5) = 4/5,$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(2, 0)$ a $(-2, 0)$ a má hodnotu 8. Minimum v $(0, 0)$ a má hodnotu 0.

- (f) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Hint: polární souřadnice

Řešení: Příklad máme z <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/>

- Množina M je kruh o středu v počátku a poloměru 1.

Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: Jde o vzor uzavřené množiny A při spojitém zobrazení g , konkrétně $A = (-\infty, 1]$, $g(x, y) = x^2 + y^2$, pak

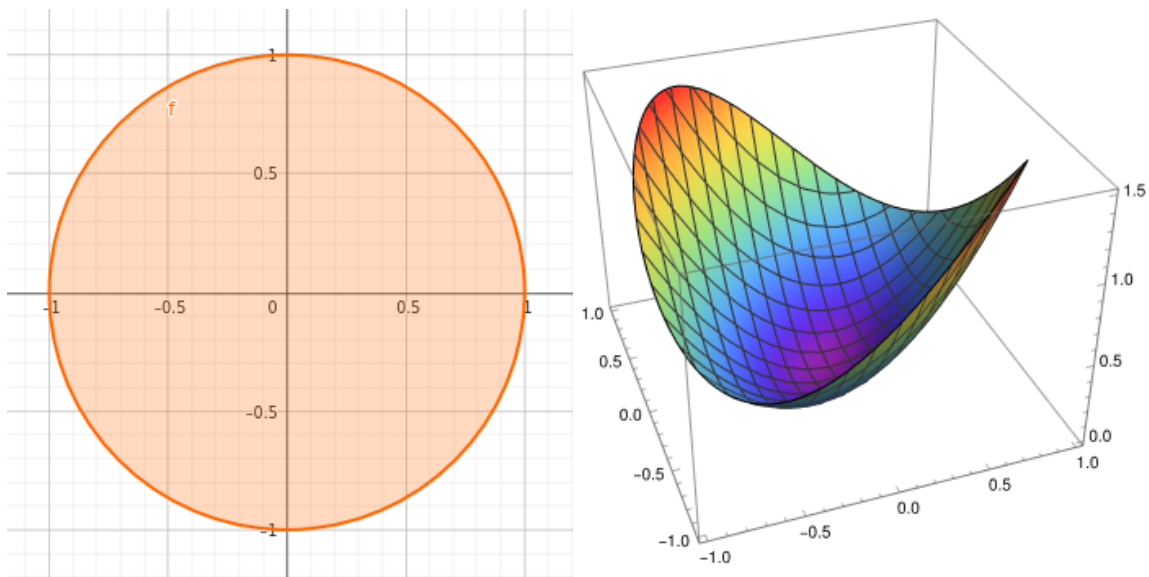
$$M = g^{-1}((-\infty, 1]).$$

Zároveň je M omezená:

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Tedy je M kompaktní.

Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $x^2 + y^2 < 1$. Parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - x \end{aligned}$$

Řešením je bod $(0, 0)$, máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. To jsou body splňující $x^2 + y^2 = 1$. Hranici popíšeme pomocí polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Dosadíme do funkce f . Tedy

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = 1 - \sin t \cos t$$

Zderivujeme, abychom našli extrémy.

$$g'(t) = \sin^2 t - \cos^2 t = -\cos(2t)$$

Nulové body:

$$\cos(2t) = 0.$$

Řešením je: $t = \frac{\pi}{4}, t = \frac{3\pi}{4}, t = \frac{5\pi}{4}, t = \frac{7\pi}{4}$.

Celkem tedy dostáváme podezřelé body $((x, y))$: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

- Přidáme „hranici hranice“, tedy bod $t = 0, (1, 0)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(1, 0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, minimum je v bodě $(0, 0)$ a má hodnotu 0.

2. Najděte globální extrémy funkcí na množině M

(a) $f(x, y, z) = x - 2y - 2z, M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Řešení:

- Rovnici vazby můžeme psát ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Označíme-li $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, lze vazebnou podmínku psát ve tvaru

$$g(x, y, z) = 0,$$

což znamená totéž jako rovnost $M = g^{-1}(0)$. Množina M je tedy uzavřená. Protože je zároveň omezená, neboť $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ určuje sféru se středem v počátku o poloměru 1, je M kompaktní. Funkce f je navíc spojitá na $\mathbb{R}^3$ (polynom), tedy nabývá na M extrémů.

- Funkce f i funkce g jsou polynomy, jsou tedy nekonečněkrát diferencovatelné, tudíž třídy C^1 na $\mathbb{R}^3$. Jako otevřenou množinu G z věty o multiplikátorech (s jednou vazbou) lze tedy volit $G = \mathbb{R}^3$. Věta o multiplikátorech s jednou vazbou potom říká, že vázaný extrém vzhledem k množině $M = g^{-1}(0)$ může mít funkce f pouze v těch bodech vazby, kde má funkce g nulový gradient nebo

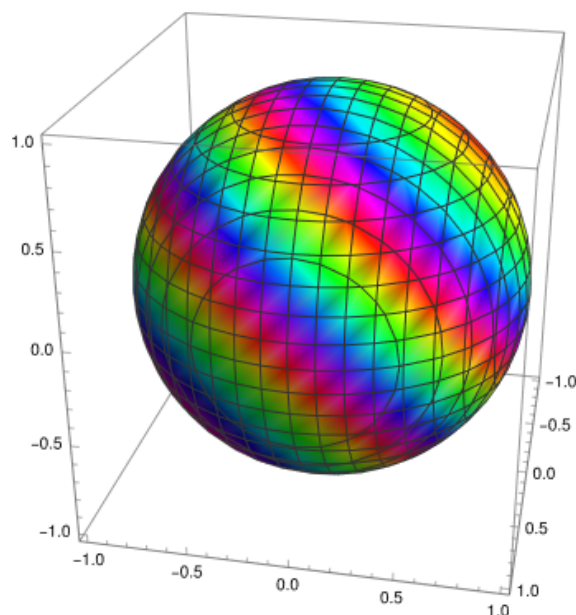


Figure 1: Obarvení sféry naznačuje funkční hodnotu

v bodech (x, y, z) , pro které existuje reálné číslo λ takové, že soustava rovnic o čtyřech neznámých x, y, z, λ

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0\end{aligned}$$

má řešení (x, y, z, λ) .

- Vyšetřeme nejprve body, kde má vazebná funkce g nulový gradient. Protože

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right),$$

kde

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 2x + 0 + 0 - 0 = 2x,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 + 2y + 0 - 0 = 2y,$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 + 0 + 2z - 0 = 2z,$$

máme, že

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z).$$

Vektor $(2x, 2y, 2z)$ je nulovým vektorem $(0, 0, 0)$ pouze v bodě $x = 0, y = 0, z = 0$, který ale není bodem vazby, neboť $g(0, 0, 0) = 0^2 + 0^2 + 0^2 - 1 = -1 \neq 0$. Tento případ nám tedy nedává žádný podezřelý bod.

– Vyšetřeme nyní výše uvedenou soustavu rovnic s multiplikátorem λ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0\end{aligned}$$

Parciální derivace vazebné funkce g už jsme vypočetli výše. Parciální derivace funkce f jsou

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x - 2y - 2z) = 1 - 0 - 0 = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x - 2y - 2z) = 0 - 2 - 0 = -2, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (x - 2y - 2z) = 0 - 0 - 2 = -2,\end{aligned}$$

zmíněná soustava rovnic má tedy tvar

$$\begin{aligned}1 + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ -2 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ -2 + \lambda \cdot 2z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic můžeme vyjádřit, že

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

a dosazením do poslední rovnice (vazby) dostaneme, že

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 1 = 0,$$

odkud vyplývá, že

$$\lambda^2 = \frac{9}{4} \implies \lambda_{1,2} = \pm \frac{3}{2}.$$

Po dosazení do výrazů pro x, y, z dostáváme dva podezřelé body $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$.

Funkční hodnoty v podezřelých bodech jsou

$$f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3,$$

$$f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3.$$

Protože funkce f je spojitá a M kompaktní, musí f na M nabývat svého maxima i minima a to v některém ze dvou bodů výše. Zjevně tedy v bodě $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ nabývá minima -3 a v bodě $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ maxima 3 .

(b) $f(x, y) = x^2 + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

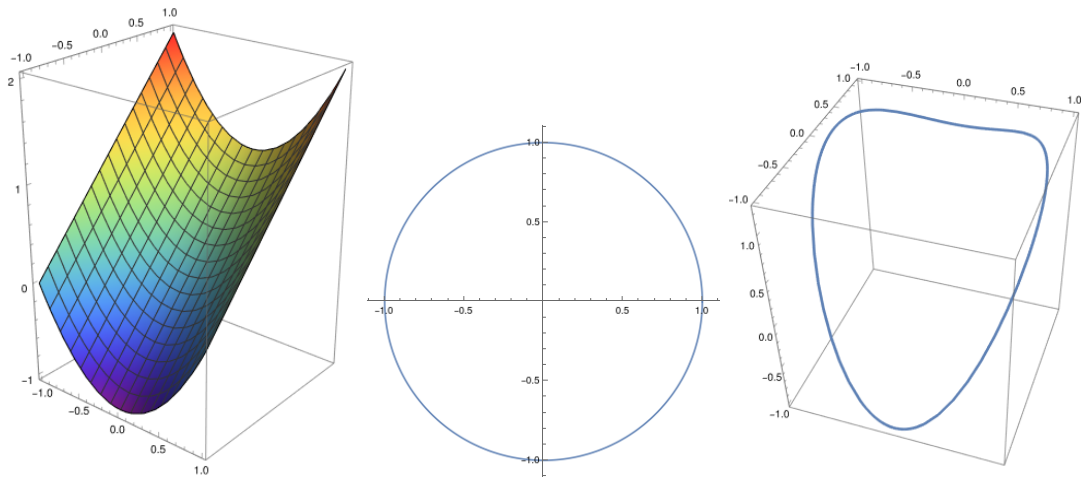
Řešení:

Zdroj: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

- Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y) = 0$. Navíc $f, g \in C^1(G)$ (polynomy).

Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Tedy M je kompaktní.

Tedy funkce f nabývá na M extrémů.



- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).

– Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x, 2y) = (0, 0).$$

Tedy $(x, y) = (0, 0)$. Tento bod ale neleží v M .

– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}2x + \lambda \cdot 2x &= 0 \\1 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\x^2 + y^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Z první rovnice máme

$$2x(1 + \lambda) = 0.$$

Tedy $x = 0$ nebo $\lambda = -1$.

Pokud $x = 0$, tak z vazební podmínky je

$$y^2 = 1$$

tedy máme podezřelé body $[0, 1]$ a $[0, -1]$.

Pokud $\lambda = -1$, tak z druhé rovnice je $y = \frac{1}{2}$. Z vazební podmínky pak máme podezřelé body $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ a $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned}f(0, 1) &= 1 \\f(0, -1) &= -1 \\f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4} \\f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $[0, -1]$ s hodnotou -1 a maxima v bodech $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{5}{4}$.

- (c) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$

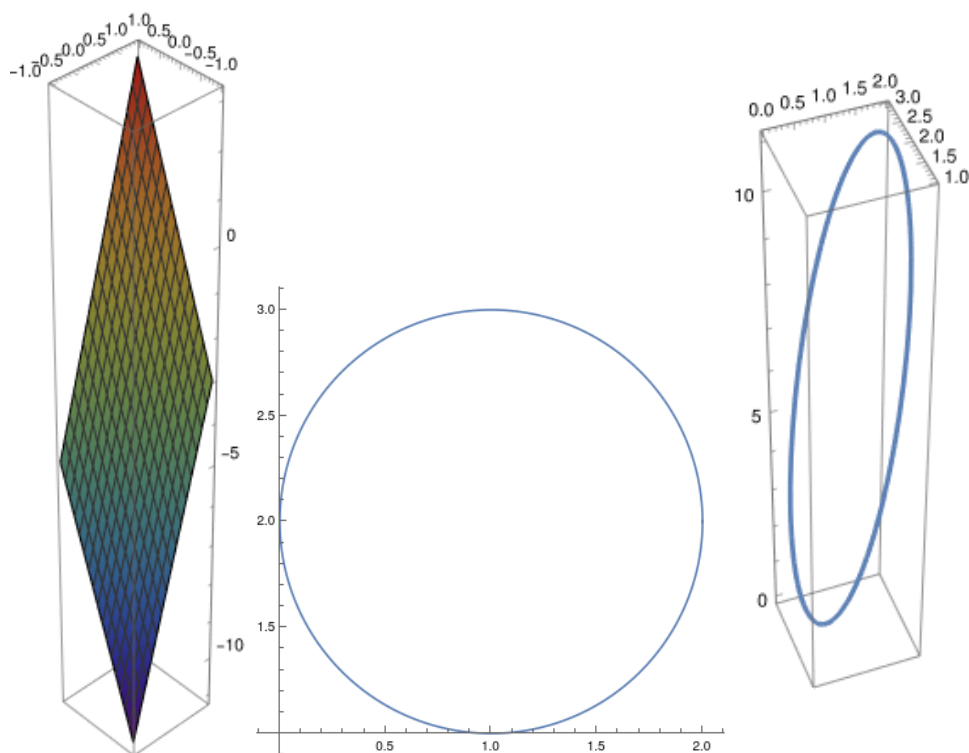
Řešení:

Zdroj: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

- Označme $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y) = 0$. Navíc $f, g \in C^1(G)$ (polynomy). Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o kružnici se středem v bodě $[1, 2]$ a poloměrem 1. Tedy M je kompakt. Tedy funkce f nabývá na M extrémů.
- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
 - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x - 2, 2y - 4) = (0, 0).$$

Tedy $(x, y) = (1, 2)$. Tento bod ale neleží v M .



– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}4 + \lambda \cdot 2(x - 1) &= 0 \\ 3 + \lambda \cdot 2(y - 2) &= 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= 1.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned}x - 1 &= -\frac{2}{\lambda} \\ y - 2 &= -\frac{3}{2\lambda}\end{aligned}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.)

Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm \frac{5}{2}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ a $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$f\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right) = 11$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ s hodnotou 1 a maxima v bodě $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ s hodnotou 11.

- (d) $f(x, y, z) = x - y + 3z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$

Řešení:

Zdroj: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

- Označme $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y, z) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o povrch elipsoidu se středem v počátku, který se vejde do koule $B(o, 3)$. Tedy M je kompakt.
Tedy funkce f nabývá na M extrémů.

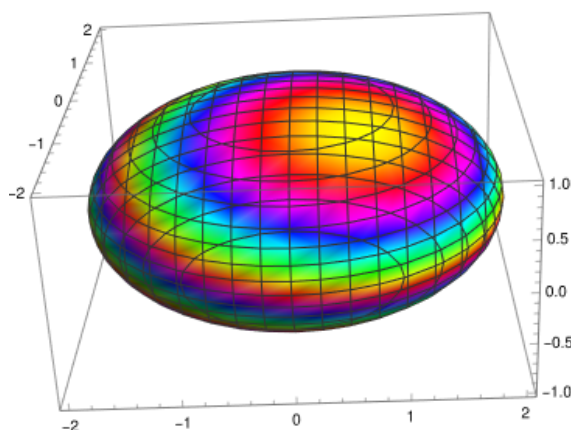


Figure 2: Obarvení povrchu naznačuje funkční hodnotu

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multipliktorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
 - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x, 2y, 8z) = (0, 0, 0).$$

Tedy $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Tento bod ale neleží v M .

– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}1 + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ -1 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ 3 + \lambda \cdot 8z &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 &= 0.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{2\lambda} \\ y &= \frac{1}{2\lambda} \\ z &= -\frac{3}{8\lambda}\end{aligned}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.)

Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{17}}{8}$$

tedy máme podezřelé body $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$ a $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= \sqrt{17} \\ f\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= -\sqrt{17}\end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}})$ s hodnotou $-\sqrt{17}$ a maxima v bodě $(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}})$ s hodnotou $\sqrt{17}$.

- (e) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$

Řešení:

Zdroj: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

- Označme $g_1(x, y, z) = x - y + z - 1$, $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^3$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g_1(x, y, z) = 0$ a zároveň $g_2(x, y, z) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).

Dále uvažujme $M_1 = g_1^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M_1 uzavřená. Analogicky Dále uvažujme $M_2 = g_2^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M_2 uzavřená. Protože $M = M_1 \cap M_2$, jde o průnik dvou uzavřených, tedy je také uzavřená. M je navíc omezená - jde o průnik válce a roviny. Máme tedy $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, odsud $-1 \leq z \leq 3$. Tedy M je kompaktní.

Tedy funkce f nabývá na M extrémů.

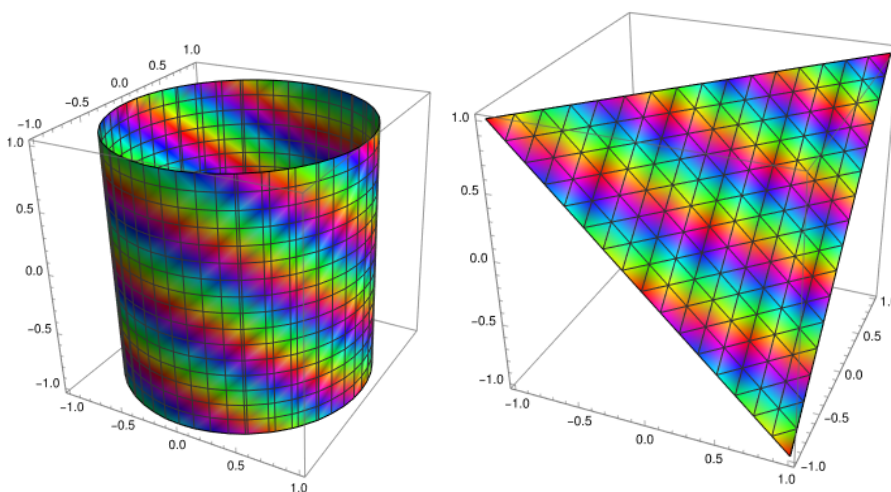


Figure 3: Obarvení povrchu naznačuje funkční hodnotu

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
 - Vyšetřeme body, kde jsou vektory ∇g_1 a ∇g_2 lineárně nezávislé. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g_1 = (1, -1, 1) = k \nabla g_2 = (2x, 2y, 0)$$

Tedy $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Tento bod ale neleží v M .

- Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátory λ a μ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\partial g_2}{\partial z} &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

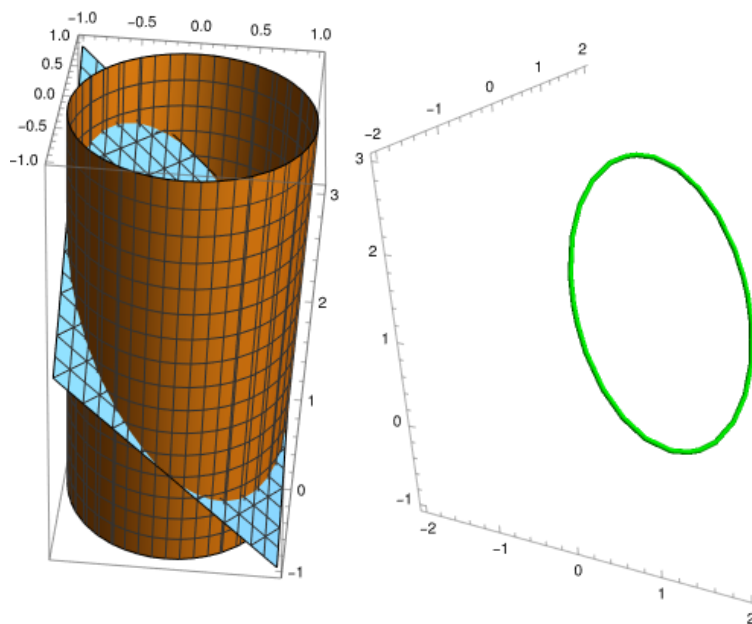


Figure 4: Takto vypadá vazba

Tedy

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 2x &= 0 \\ 2 + \lambda \cdot -1 + \mu \cdot 2y &= 0 \\ 3 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 &= 0 \\ x - y + z - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice máme, že $\lambda = -3$. Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\mu} \\ y &= -\frac{5}{2\mu} \end{aligned}$$

(Vyloučili jsme možnost $\mu = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.)

Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\mu = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}]$ a $[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}\right) &= 3 - \sqrt{29} \\ f\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right) &= 3 + \frac{9}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $\left[\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}\right]$ s hodnotou $3 - \sqrt{29}$
a maxima v bodě $\left[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right]$ s hodnotou $3 + \frac{9}{\sqrt{29}}$

(f) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

Řešení:

Zdroj: <https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf>

- Označme $g(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená.

M je navíc omezená - jde o pootočenou elipsu (to by se ukázalo, kdybychom „otočili“ soustavu souřadnic). Omezenost plyne z těchto odhadů:

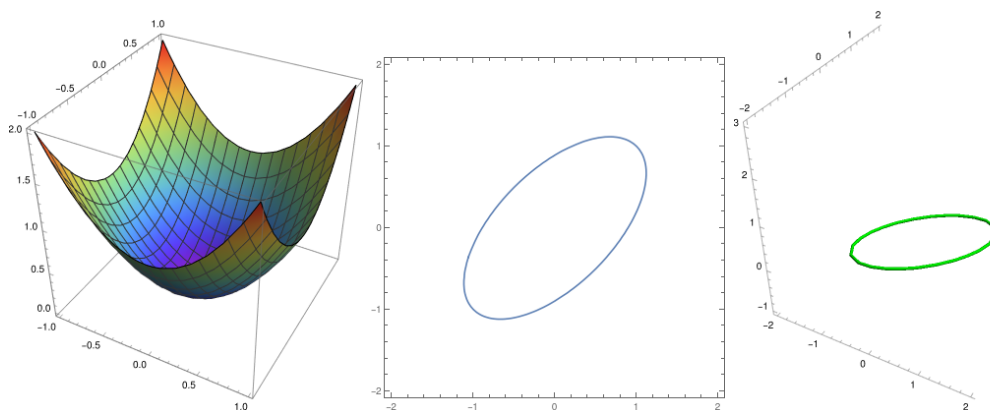
$$5(x^2 + y^2) = 4 + 6xy \leq 4 + 3(x^2 + y^2)$$

tedy

$$2(x^2 + y^2) \leq 4$$

Tedy M je kompakt.

Tedy funkce f nabývá na M extrémů.



- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
 - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (10x - 6y, -6x + 10y) = (0, 0).$$

Tedy $(x, y) = (0, 0)$. Tento bod ale neleží v M .

- Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}2x + \lambda \cdot (10x - 6y) &= 0 \\2y + \lambda \cdot (-6x + 10y) &= 0 \\5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 &= 0.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned}x(5\lambda + 1) &= 3\lambda y \\y(5\lambda + 1) &= 3\lambda x\end{aligned}$$

Vyloučíme možnost $\lambda = 0$, protože pak by byl řešením bod $(0, 0)$, který nesplňuje vazební podmínku. Analogicky vyloučíme možnost $(5\lambda + 1) = 0$. Uvažujeme-li $x = 0$, tak opět vyjde řešení $(0, 0)$. Analogicky pro $y = 0$. Můžeme tedy obě rovnice vynásobit postupně y a x . Dostaneme

$$\begin{aligned}yx(5\lambda + 1) &= 3\lambda y^2 \\xy(5\lambda + 1) &= 3\lambda x^2\end{aligned}$$

Tedy $y = \pm x$.

Dosazením do vazební podmínky získáme pro $y = x$

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

a pro $y = -x$

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

tedy máme podezřelé body $[1, 1]$, $[-1, -1]$, $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned}f(1, 1) &= 2 \\f(-1, -1) &= 2 \\f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} \\f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodech $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{1}{2}$ a maxima v bodech $[1, 1]$, $[-1, -1]$ s hodnotou 2.

Zkouškové příklady

Zdroj: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/vyuka.php>

3. Najděte globální extrémy funkcí na množině M

- (a) $f(x, y, z) = xy + yz$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$
- (b) $f(x, y, z) = z + e^{xy}$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$
- (c) $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$

4. Určete maximální možný objem kváдру, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x, y, z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z = 2\}$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1, 1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepíšme na tvar

$$e^{\varphi(x) \log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right) + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right)^2 + e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi''(x) \log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \right) \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)^2 \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2} \right) - 2\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f . Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x + z, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= y, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, 1, 1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \\ (2) \quad & x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \\ (3) \quad & y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \\ (4) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (5) \quad & x + y + z = 1. \end{aligned}$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1 - \sqrt{5})/4, 1/2, (1 + \sqrt{5})/4 \right], \quad \left[(1 + \sqrt{5})/4, 1/2, (1 - \sqrt{5})/4 \right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \quad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad E5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x \, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t + t^3} dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{-1}{t + t^3} dt &= \int \left(\frac{t}{1 + t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1 + t^2} dt - \int \frac{1}{t} dt \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(1 + t^2) - \log |t|, \quad t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(1 + \cos^2 x) - \log |\cos x|, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x} dx = \frac{1}{2} \log \frac{5}{2}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^4. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 4)} dx \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy C^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{aligned}e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2 \\ + e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\ - e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) \\ - 2\varphi''(x) &= 0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad G4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f , g_1 i g_2 jsou třídy $C^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{xy}y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{xy}x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= -2z.\end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned}(1) \quad & e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \\ (2) \quad & e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \\ (3) \quad & 1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \\ (4) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (5) \quad & x^2 + y^2 - z^2 = 0.\end{aligned}$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x-y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x-y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Příklad G5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Provedeme rozklad integrandu na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 4)} dx &= \int \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x+1} + \frac{4x+7}{x^2 + 2x + 4} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{2}{3} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx + \frac{1}{3} \int \frac{3}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{2}{3} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{3})^2 + 1} dx \\ &\stackrel{c}{=} \frac{2}{3} \log|x+1| + \frac{2}{3} \log(x^2 + 2x + 4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right), \\ x &\in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (-1, +\infty). \end{aligned}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnotu matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , určete kde existují vlastní parciální derivace a spočítejte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x \cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnotu matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

proměnné x , která je třídy C^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítáme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) &= 0, \\ \frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 - (x + (\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1 - (\varphi(x) + x^2)^2}} &= 0, \\ -\frac{1}{2}(1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x + (\varphi(x))^2)) \cdot (1 + 2\varphi(x)\varphi'(x))^2 \\ &+ (1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x) + x^2)) \cdot (\varphi'(x) + 2x)^2 \\ &+ (1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) \\ &+ (1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x) + 2) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a využijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = -4$.

Příklad H4 : Položme

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = 2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) = -2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = 2x + 1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y) = 2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y) = -2z \end{array}$$

Zkoumejme pro která $[x, y, z] \in M$ jsou vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, -2y, -2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x = -\frac{1}{2}$ nebo $y = z = 0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M .

Nyní řešme soustavu:

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (2) \quad & x = y^2 + z^2 \\ (3) \quad & 2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ (4) \quad & 2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \\ (5) \quad & 2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \end{aligned}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$(6) \quad x = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} \right], \quad \left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} \right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

Příklad H5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1 - t^2}{2t - 1}, \quad dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2} dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{2t-1} + 1}{\frac{1-t^2}{2t-1} + t} \cdot \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(2t - 1)^2} dt = \int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2} dt$$

Platí

$$\frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{4t + 1}{(2t - 1)^2}$$

Rozložíme-li druhý výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{-2(2t - t^2)}{(2t - 1)^2} dt &= \int \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{3}{(2t - 1)^2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{2}{2t - 1} dt \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{3}{8t - 4} - \frac{1}{2} \log |2t - 1|, \quad t \in (-\infty, 1/2) \text{ nebo } t \in (1/2, +\infty). \end{aligned}$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx &= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \\ &+ \frac{3}{8(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) - 4} - \frac{1}{2} \log |2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1|, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) kvadr A-H, $A = [0, 0, 0]$

$G \in M$:

$$M = \{(x, y, z) : 4x + 2y + z = 2, x, y, z \geq 0\}$$

Účel: max objektiv

$$G = [x_0, y_0, z_0]$$

následně max $f(x, y, z) = xyz$ (máme být $|xyz|$, ale
protože $x, y, z \geq 0$)

$$g(x, y, z) = 4x + 2y + z - 2$$

$$(1) \nabla g = (4, 2, 1) \neq 0 \text{ nikde}$$

$$(2) f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = 0 \quad xyz + \lambda(4x + 2y + z - 2) = 0$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} : \\ \frac{\partial}{\partial y} : \\ \frac{\partial}{\partial z} : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} yz + 4\lambda = 0 \\ xz + 2\lambda = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \lambda = -xy \rightarrow$$
$$\begin{array}{l} yz - 4xy = 0 \\ xz - 2xy = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} -yz + 4xy = 0 \\ 2xz - 4xy = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2xz - yz = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow z(2x - y) = 0$$

$$4x + 2y + z = 0$$

$$4x + 2y + z = 0$$

$$4x + 2y + z = 0$$

(a) $z = 0 \rightarrow$ tam max stejné nebude (místo kvadratu by
bylo obdélník)

$$\rightarrow (b) \boxed{y = 2x}, 4x + 2y + z = 0$$

$$\rightarrow 4x + 2 \cdot 2x + z = 2$$

$$\rightarrow \boxed{2 - 8x = z} \quad (\text{a méme } y = 2x)$$

considère de $\boxed{xz - 2xy = 0}$

$$\rightarrow x(2 - 8x) - 2x \cdot 2x = 0$$

$$2x - 8x^2 - 4x^2 = 0$$

$$2x(1 - 6x) = 0$$

✓
 $x = 0$ (ne peut être max)

$$\boxed{x = \frac{1}{6}}$$

par $\boxed{y = \frac{1}{3}}$

$$z = 2 - \frac{8}{6}$$

$$\boxed{z = \frac{2}{3}}$$

(par pro forme $\lambda = -xy \quad \lambda = -\frac{1}{18}$).

Max. je a boole $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$

a l'ordonnée je $\frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 9} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$

Bonusové příklady

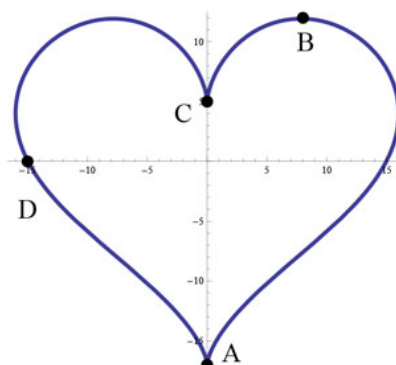
5. Farmář a fařmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?
- (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y - 100$
 - (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100$, $g(x, y) = xy$
 - (c) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 100$
 - (d) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy - 100$



Figure 5: <https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/>

Řešení: (a)

6. Ve kterém z bodů A , B , C , D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: <https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml>

Řešení: A