



7. cvičení – Více implicitních funkcí

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechtě $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nechtě $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$ a nechtě platí:

1. $F \in C^k(G)$
2. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
- 3.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí bodu $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\bar{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\bar{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in C^k(U)$.

Příklady

1. Jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} e^{u/x} \cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ e^{u/x} \sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $A = [1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]$ funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ třídy C^∞ . Spočtěte parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial x}$ v bodě A .

2. Ukažte, že existují funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1, 2]$, které jsou na U třídy C^1 , splňují $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x. \end{aligned}$$

Spočtěte $u'(1, 2)$ a $v'(1, 2)$.

3. Dokažte, že existují funkce $z(x, y)$ a $t(x, y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1, -1]$ a splňují rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 &= 0 \\ x + y + z - t - 2 &= 0, \end{aligned}$$

spolu se vztahy $z(1, -1) = 2$ a $t(1, -1) = 0$.

Spočtěte $z''(1, -1)$.

4. Ukažte, že rovnice

$$\begin{aligned}x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[3, 3]$ funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ třídy C^∞ , které splňují $u(3, 3) = 2$, $v(3, 3) = 1$. Spočtete $z_{xy}(3, 3)$, pokud $z = 2uv$.

5. Spočtete x_v , y_v a z_v , pokud

$$\begin{aligned}u &= x^2 + y^2, \\ v &= x^2 - 2xy^2, \\ z &= \ln(y^2 - x^2)\end{aligned}$$

v bodě $u = 5$, $v = -7$, $x(5, -7) = 1$ a $y(5, -7) = 2$.

(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích, z_v pak vyjádřete řetězovým pravidlem.)

Zkouškové příklady

6. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(1, 0) = 1$ a $y(1, 0) = 1$. Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce $y(u, v)$ v bodě $[1, 0]$ a pokud ano, nalezněte jej.

7. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= \ln(x^2 + y^2) - 2xy \\ v &= e^x \sin y + \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, 1) = 1$ a $y(0, 1) = 0$. Nechť navíc je z funkce proměnných x a y definovaná na okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ předpisem $z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ a nechť Φ je funkce proměnných u a v definovaná na okolí bodu $[u, v] = [0, 1]$ předpisem $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$. Spočtete $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$.

Teorie

8. ✿ Nechť $T : (C([0, 1]), \rho_{\text{sup}}) \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení definované jako $T(f) = \int_0^1 f(x) \, dx$. Ukažte, že T je spojitý.

(8) Ukažte, že z definice. Tedy že $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ $\forall f, g \in C([0, 1])$ $\rho_{\text{sup}}(f, g) < \delta \Rightarrow |T(f) - T(g)| < \varepsilon$.