

6. cvičení – Implicitní funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[-2, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtete první derivaci této funkce v bodě -2 .

Zdroj příkladu: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

Řešení: Položme $F = x^2 - y^2 + xy^2 - 1$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-2, 1)$. Pak

(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$

(b) $F(-2, 1) = 4 - 2 - 1 - 1 = 0$

(c) $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 2xy$, $\frac{\partial F}{\partial y}(-2, 1) = -2 - 4 = -6 \neq 0$.

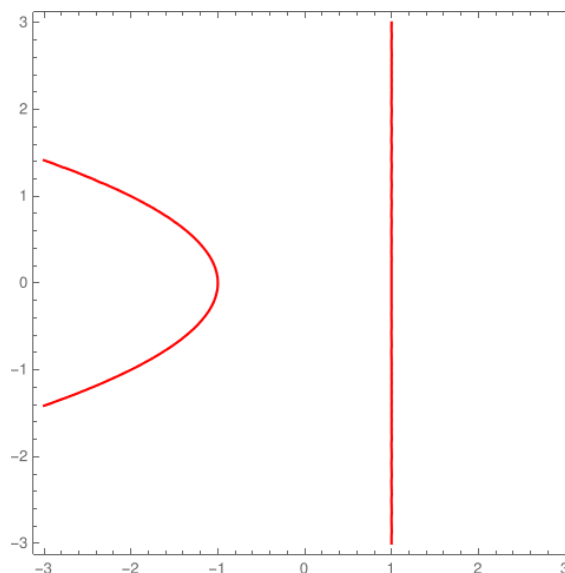
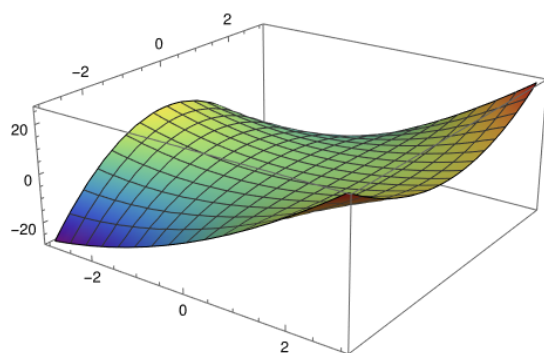
Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.

Zderivujeme podle x a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-2, 1) = -4 + 1 = -3.$$

Pak

$$y'(-2) = -\frac{-3}{-6} = -\frac{3}{6}.$$



2. UkaŹte, Źe rovnice $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ urĹuje na okolí bodu $[1, 1]$ implicitnĹ zadanou funkci $y(x)$. SpoĹtĹte první a druhou derivaci tĹto funkce v bodĹ 1.

Zdroj pŹikladu: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_3.pdf

Řešení: PoloŹme $F = x^2 + y^2 + xy - 3$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Pak

(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$

(b) $F(1, 1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$

(c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 3 \neq 0$.

Tedy jsou splnĹny podmíanky vĹty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, Źe pro kaŹdĹ $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje pŹávĹ jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. OznaĹme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$. Zderivujeme pŹvodní rovnici

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' + y + xy' &= 0 \\ y'(2y + x) &= -2x - y \\ y' &= \frac{-2x - y}{2y + x} \end{aligned}$$

Dosadíme bod $[1, 1]$ a získaíme

$$y'(1) = -1.$$

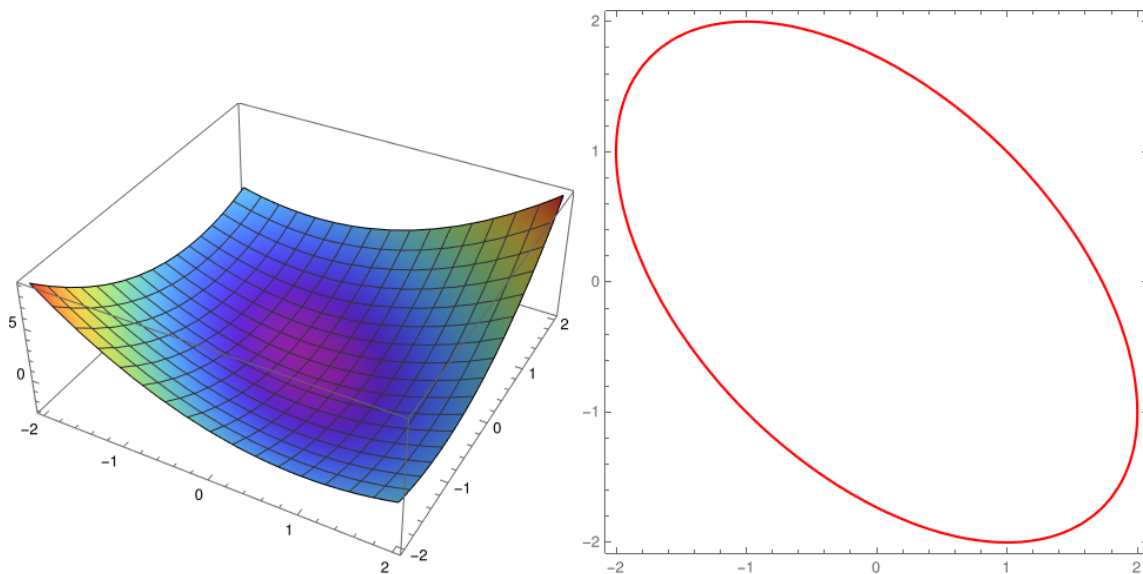
Pro druhou derivaci zderivujeme ještĹ jednou

$$\begin{aligned} y''(2y + x) + y'(2y' + 1) &= -2 - y' \\ y'' &= \frac{-y'(2y' + 1) - 2 - y'}{(2y + x)} \\ y'' &= \frac{-2(y')^2 - 2y' - 2}{(2y + x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(2y + x) + y'(2y' + 1) &= -2 - y' \\ y'' &= \frac{-y'(2y' + 1) - 2 - y'}{(2y + x)} \\ y'' &= \frac{-2(y')^2 - 2y' - 2}{(2y + x)} \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 1$, $y' = -1$:

$$y''(1) = \frac{-2 + 2 - 2}{2 + 1} = -\frac{2}{3}.$$



3. Ukažte, že rovnice $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ určuje na okolí bodu $[0, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

Zdroj příkladu: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_3.pdf

Řešení: Položme $F = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1)$. Pak

(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$

(b) $F(0, 1) = 1 - 0 - 1 = 0$

(c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)2y - 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 1 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.

Uvažujme původní rovnici (y je nyní funkce, pro názornost můžeme psát $y(x)$):

$$(x^2 + y(x)^2)^2 - 3x^2y(x) - y(x)^3 = 0$$

Zderivujme obě strany podle x (pozor na vnitřní funkci) a vyjádřeme y :

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y(x)^2)(2x + 2y(x)y'(x)) - 6xy(x) - 3x^2y'(x) - 3y(x)^2y'(x) &= 0 \\ 4x^3 + 4x^2y(x)y'(x) + 4xy(x)^2 + 4y(x)^3y'(x) - 6xy(x) - 3x^2y'(x) - 3y(x)^2y'(x) &= 0 \\ y'(x)(4x^2y(x) + 4y(x)^3 - 3x^2 - 3y(x)^2) &= -4x^3 - 4xy(x)^2 + 6xy(x) \\ y'(x) &= \frac{-4x^3 - 4xy(x)^2 + 6xy(x)}{4x^2y(x) + 4y(x)^3 - 3x^2 - 3y(x)^2} \end{aligned}$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 1)$ a získáme

$$y'(0) = \frac{0}{1}.$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici (budeme pro zjednodušení psát y místo $y(x)$).

$$y'(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2) = -4x^3 - 4xy^2 + 6xy$$

Tedy

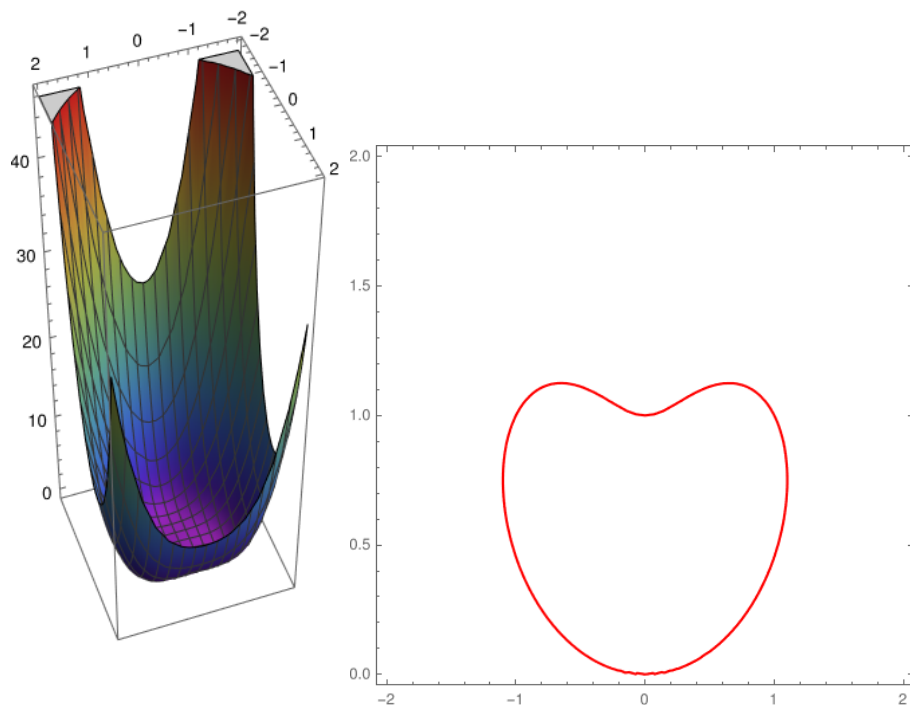
$$y''(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2) + y'(8xy + 4x^2y' + 12y^2y' - 6x - 6yy') = -12x^2 - 4y^2 - 8xyy' + 6y + 6xy'$$

Dosadíme $x = 0$, $y(x) = 1$ a $y'(x) = 0$.

$$y''(0)(0 + 4 - 0 - 3) + 0(0 + 0 + 0 - 0 - 0) = -0 - 4 - 0 + 6 + 0$$

Tedy

$$y''(0) = 2.$$



4. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě $[\pi, \pi]$.

Zdroj příkladu: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

Řešení: Položme $F = y - \frac{1}{2} \sin y - x$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi, \pi)$. Pak

- (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
- (b) $F(\pi, \pi) = \pi - 0 - \pi = 0$,
- (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2} \cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, \pi) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.

Zderivujeme podle x a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\pi, \pi) = -1.$$

Pak

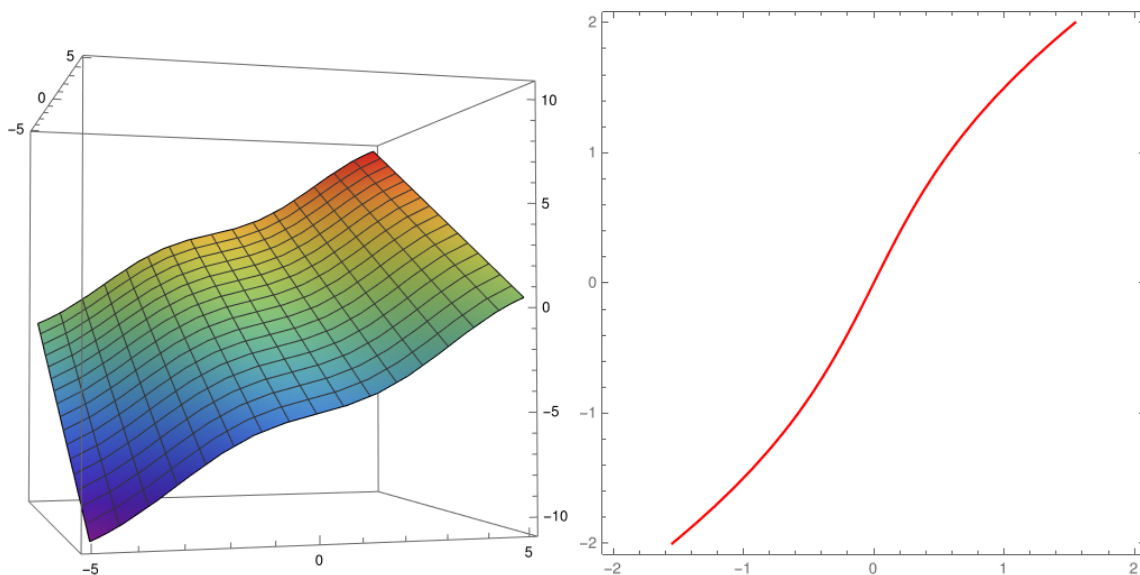
$$y'(\pi) = -\frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Pro rovnici tečny platí

$$y = \bar{y} + f'(x)(x - \bar{x})$$

Tedy

$$y = \pi + \frac{2}{3}(x - \pi).$$



5. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Určete, zda graf této funkce leží na okolí daného bodu pod tečnou nebo nad tečnou.

Zdroj příkladu: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

Řešení: Položme $F = y - \frac{1}{2} \sin y - x$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak

- (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
 (b) $F(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
 (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2} \cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.

Zderivujeme původní rovnici

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{2} \cos y y' &= 1 \\ y' \left(1 - \frac{1}{2} \cos y \right) &= 1 \\ y' &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2} \cos y)} \end{aligned}$$

Dosadíme

$$y' \left(\frac{\pi-1}{2} \right) = \frac{1}{1-0} = 1$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme

$$\begin{aligned} y'' \left(1 - \frac{1}{2} \cos y \right) + y' \left(\frac{1}{2} \sin y y' \right) &= 0 \\ y'' &= -\frac{y' \left(\frac{1}{2} \sin y y' \right)}{(1 - \frac{1}{2} \cos y)} \end{aligned}$$

Dosadíme $x = \frac{\pi-1}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y' = 1$:

$$y'' = -\frac{\frac{1}{2}}{(1-0)} = -\frac{1}{2}$$

Dohromady máme: funkce y je $\mathcal{C}^2$, tedy y'' je spojitá. Navíc $y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$. Odtud máme, že existuje okolí bodu $\bar{x}$ takové, že druhá derivace je na tomto okolí záporná. Funkce je tam tedy konkávní a leží pod tečnou.

6. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lok. extrém.

Zdroj příkladu: <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

Řešení: Položme $F = -x^2 + y^2 - 2xy + y$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$. Máme $F \in \mathcal{C}^k(G)$.

Hledáme takové body (x, y) , kde

- (a) $F(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$
 (b) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x + 1 \neq 0$
 (c) $y'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0$, tedy $\frac{\partial F}{\partial x} = -2x - 2y = 0$ (stacionární body)

Ze 3. rovnice máme $y = -x$. Dosadíme do první:

$$\begin{aligned} -x^2 + x^2 + 2x^2 - x &= 0 \\ x(2x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Celkem máme body $(0, 0)$ a $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Pro oba je navíc splněna podmínka $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Tedy jsou v obou bodech splněny podmínky věty o implicitní funkci. Spočteme dvě derivace.

$$\begin{aligned} -2x + 2yy' - 2y - 2xy' + y' &= 0 \\ y'(2y - 2x + 1) &= 2x + 2y \end{aligned}$$

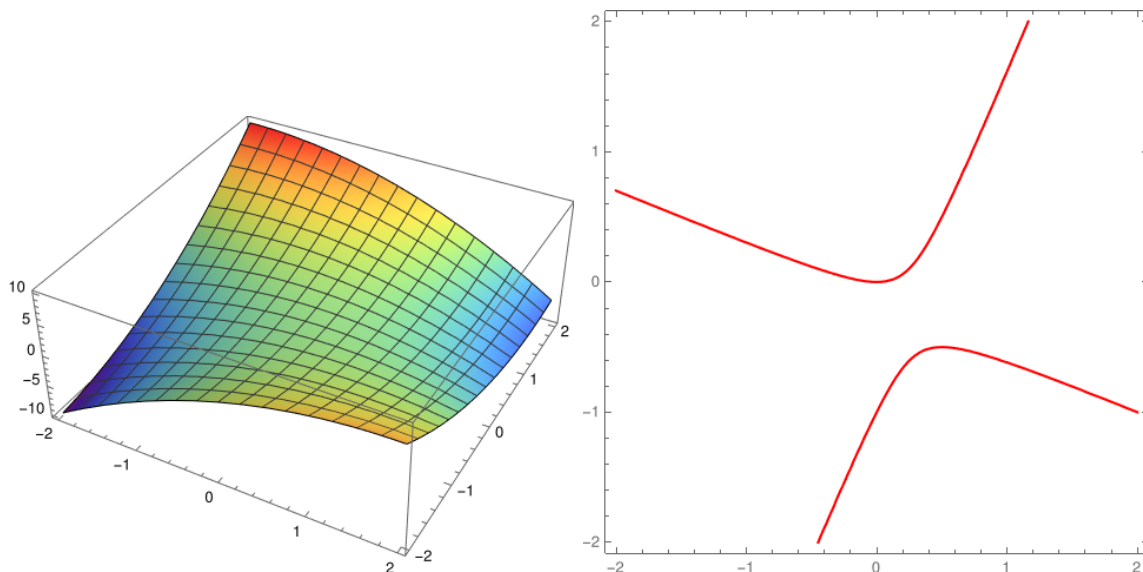
dále

$$\begin{aligned} y''(2y - 2x + 1) + y'(2y' - 2) &= 2 + 2y' \\ y'' &= \frac{-y'(2y' - 2) + 2 + 2y'}{(2y - 2x + 1)} \end{aligned}$$

Dosadíme nalezené body (navíc máme, že $y' = 0$). Tedy

$$\begin{aligned} y''(0) &= \frac{2}{1} > 0. \\ y''(\frac{1}{2}) &= \frac{2}{-1} < 0. \end{aligned}$$

Závěr: v bodě $(0, 0)$ je lok. minimum a v bodě $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ je lok. maximum.



7. Ukažte, že rovnice $\ln(x^2 z^3) = e^{z \cos y} - 1$ určuje na okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě.

Příklad is řešením máme z <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

Řešení: Položme $F(x, y, z) = \ln(x^2 z^3) - e^{z \cos y} + 1$, $G = (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, \frac{\pi}{2})$, $\bar{z} = 1$. Pak

(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,

(b) $F(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = \log(1) - e^{1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}} + 1 = 0$,

(c) $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{3}{z} - e^{z \cos y} \cos y$, $\frac{\partial F}{\partial z}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = 3 - e^{1 \cos \frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} = 3 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta)$ s vlastností $F(x, y, z) = 0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x, y)$, pak $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^1(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$.

Zderivujeme podle x a y a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = -2.$$

Pak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{z \cos y} z (-\sin y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = 1.$$

Pak

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3}$$

8. Ukažte, že rovnice $z + e^z = xy + 2$ určuje na okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. a 2. řádu v daném bodě.

Příklad is řešením máme z <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

Řešení:

- Položme $F(x, y, z) = z + e^z - xy - 2$, $G = \mathbb{R}^3$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, 1)$, $\bar{z} = 0$. Pak

(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,

(b) $F(-1, 1, 0) = 0 + e^0 + 1 - 2 = 0$,

(c) $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + e^z$, $\frac{\partial F}{\partial z}(-1, 1, 0) = 1 + 1 \neq 0$

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta)$ s vlastností $F(x, y, z) = 0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x, y)$, pak $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^2(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$.

- Pro zjištění derivací budeme aplikovat řetízkové pravidlo. Uvažujme rovnici

$$z + e^z = xy + 2,$$

kde $z = z(x, y)$ je funkce dvou proměnných. Prve derivujeme podle x .

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= y \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1 + e^z) &= y \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{1 + e^z}\end{aligned}$$

V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1, 0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

Analogicky zderivujeme podle y .

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial z}{\partial y}(1 + e^z) &= x \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x}{1 + e^z}\end{aligned}$$

V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

$$\frac{\partial z}{\partial y}(-1, 1, 0) = \frac{-1}{1 + e^0} = -\frac{1}{2}$$

- Analogicky postupujeme pro 2. derivace.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y(1 + e^z)^{-2}e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1, 1, 0) = -1(1 + e^0)^{-2}e^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1, 0) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

Dále

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(1 + e^z)^{-2}e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1, 1, 0) = 1(1 + e^0)^{-2}e^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(-1, 1, 0) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

Smíšená derivace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(1 + e^z) - y(e^z) \frac{\partial z}{\partial y}}{(1 + e^z)^2}$$

V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1, 1, 0) = \frac{(1 + e^0) - 1(e^0) \frac{\partial z}{\partial y}(-1, 1, 0)}{(1 + e^0)^2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{4} = \frac{5}{8}$$

Navíc platí

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-1, 1, 0) = \frac{5}{8},$$

což plyne z věty o záměnnosti parciálních derivací a faktu, že $\varphi \in \mathcal{C}^2(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$.

9. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$ určuje na okolí bodu $[1, 2, 3]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Najděte rovnici tečné roviny v daném bodě.

Příklad is řešením máme z <http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf>

Řešení: Položme $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20$, $G = \mathbb{R}^3$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 2)$, $\bar{z} = 3$. Pak

- (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
- (b) $F(1, 2, 3) = 1 + 4 + 9 + 6 - 20 = 0$,
- (c) $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + xy$ $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 2, 3) = 6 + 2 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta)$ s vlastností $F(x, y, z) = 0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x, y)$, pak $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^1(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$.

Zderivujeme podle x a y a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + yz, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1, 2, 3) = 2 + 6 = 8.$$

Pak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8}{8} = -1$$

a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + xz, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 2, 3) = 4 + 3 = 7.$$

Pak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{7}{8}.$$

Protože $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^1(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$, tak funkce má derivaci a můžeme sestavit rovnici tečné roviny. Dostáváme

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(y - \bar{y}) \\ z - 3 &= -1(x - 1) - \frac{7}{8}(y - 2) \\ x + \frac{7}{8}y + z &= \frac{23}{4} \end{aligned}$$

Zkouškové příklady

10. Ukažte, že daná rovnice určuje na okolí bodu $[\bar{x}, \bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.

(a) $x^y + y^x = 2y, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 1]$

Řešení: Položme $F = x^y + y^x - 2y$, $G = (0, \infty) \times (0, \infty)$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$

ii. $F(1, 1) = 1 + 1 - 2 = 0$

iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = x^y \log x + xy^{x-1} - 2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 0 + 1 - 2 = -1 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.

Uvažujme původní rovnici

$$x^y + y^x = 2y$$

neboli

$$e^{y \log x} + e^{x \log y} = 2y$$

Zderivujeme obě strany podle x a vyjádříme y' :

$$x^y \left(\frac{y}{x} + y' \log x \right) + y^x \left(\log y + \frac{x}{y} y' \right) = 2y'$$

$$y' \left(x^y \log x + y^x \frac{x}{y} - 2 \right) = -x^y \frac{y}{x} - y^x \log y$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (1, 1)$ a získáme

$$y'(1)(0 + 1 - 2) = -1 - 0$$

$$y'(1) = 1.$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$y' \left(x^y \log x + y^x \frac{x}{y} - 2 \right) = -x^y \frac{y}{x} - y^x \log y$$

Tedy

$$\begin{aligned} & y'' \left(x^y \log x + y^x \frac{x}{y} - 2 \right) \\ & + y' \left(x^y \left(\frac{y}{x} + y' \log x \right) \log x + \frac{x^y}{x} + y^x \left(\log y + \frac{x}{y} y' \right) \frac{x}{y} + y^x \frac{y - xy'}{y^2} \right) \\ & = -x^y \left(\frac{y}{x} + y' \log x \right) \frac{y}{x} - x^y \frac{y'x - y}{x^2} - y^x \left(\log y + \frac{x}{y} y' \right) \log y - \frac{y^x}{y} \end{aligned}$$

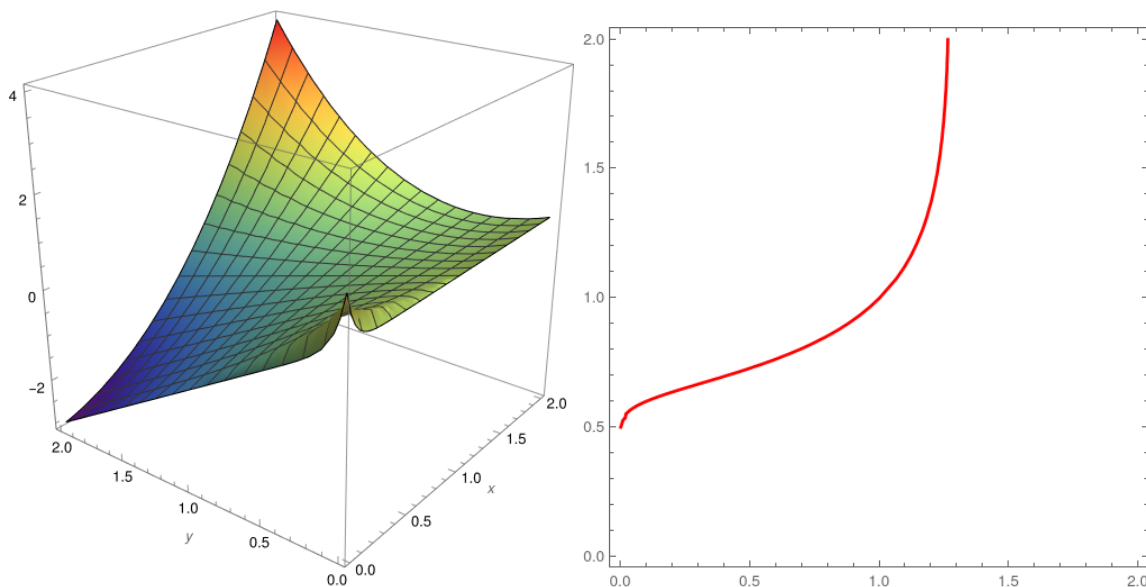
Dosadíme $x = 1$, $y(1) = 1$ a $y'(x) = 1$.

$$y''(1)(0+1-2) + 1(1(1+0))0 + 1 + 1(0+1) \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1-1}{1} = -1(1+0) \cdot 1 - 1 \frac{1-1}{1} - 1(0+1) \cdot 0 - 1$$

Tedy

$$-y''(1) + 1 + 1 = -1 - 1$$

$$y''(1) = 4$$



(b) $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

Řešení: Položme $F = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$

ii. $F(0, 0) = 1 + 1 - 2 = 0$

iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{\sin xy}(\cos xy)x - 2 \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 = -2 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.

Uvažujme původní rovnici

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y' :

$$e^{\sin x^2} \cos(x^2) 2x + e^{\sin xy} \cos(xy)(y + xy') = 2y'$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

$$e^0 \cos(0) \cdot 0 + e^0 \cos(0)(0 + 0) = 2y'(0)y'(0) = 0.$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$e^{\sin x^2} \cos(x^2) 2x + e^{\sin xy} \cos(xy)(y + xy') = 2y'$$

Tedy

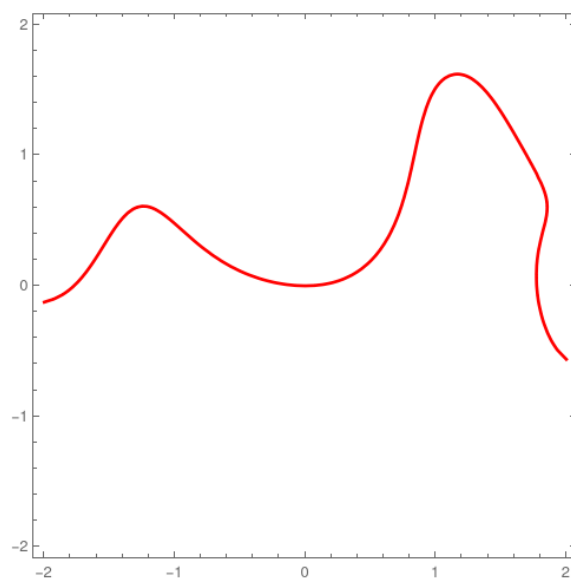
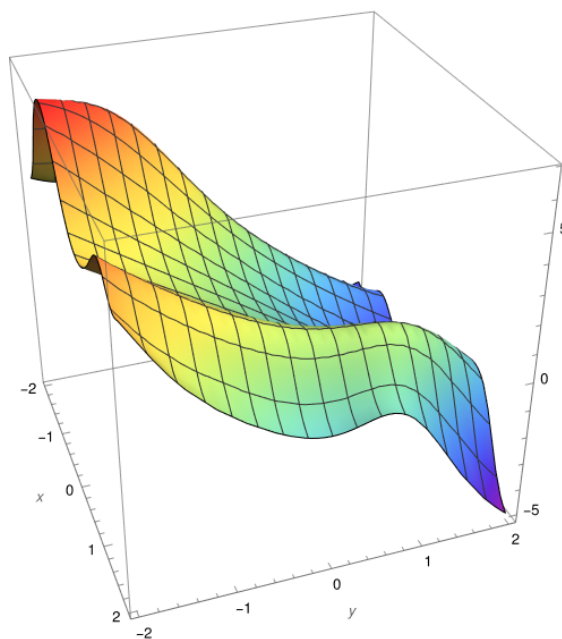
$$\begin{aligned} & e^{\sin x^2} (\cos(x^2) 2x)^2 + e^{\sin x^2} (-\sin(x^2) 4x^2 + \cos(x^2) \cdot 2) \\ & + e^{\sin xy} (\cos(xy)(y + xy'))^2 + e^{\sin xy} (-\sin(xy)(y + xy')^2 + \cos(xy)(y' + y' + xy'')) = 2y'' \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(x) = 0$.

$$2+ = 2y''$$

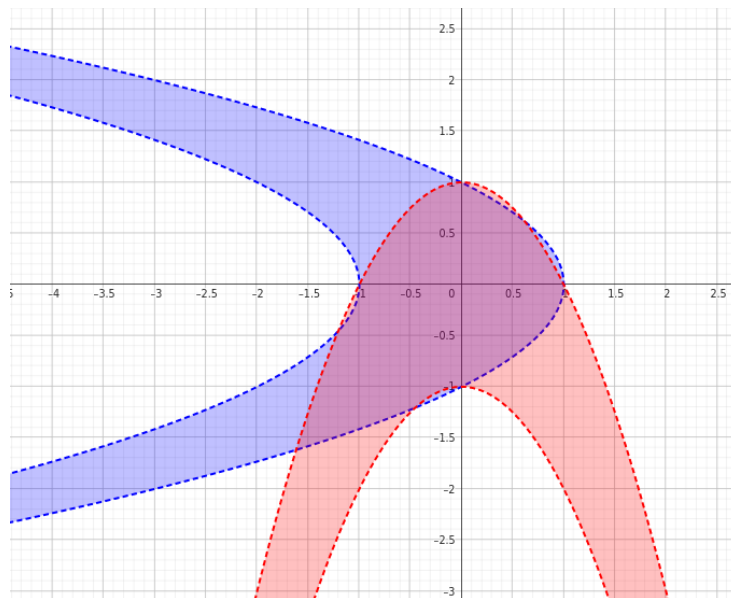
Tedy

$$y''(0) = 1$$



(c) $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2), [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

Řešení: Položme $F = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2)$, $G = (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (lze vykukat z obrázku), $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$.



Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$

ii. $F(0, 0) = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0$

iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}, \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.

Uvažujme původní rovnici

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

Zderivujeme obě strany podle x a vyjádříme y' :

$$\frac{1 + 2yy'}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} = -\frac{y' + 2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

$$\begin{aligned} 1 &= -y'(0) \\ -1 &= y'(0) \end{aligned}$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$\frac{1 + 2yy'}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} = -\frac{y' + 2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$

Tedy

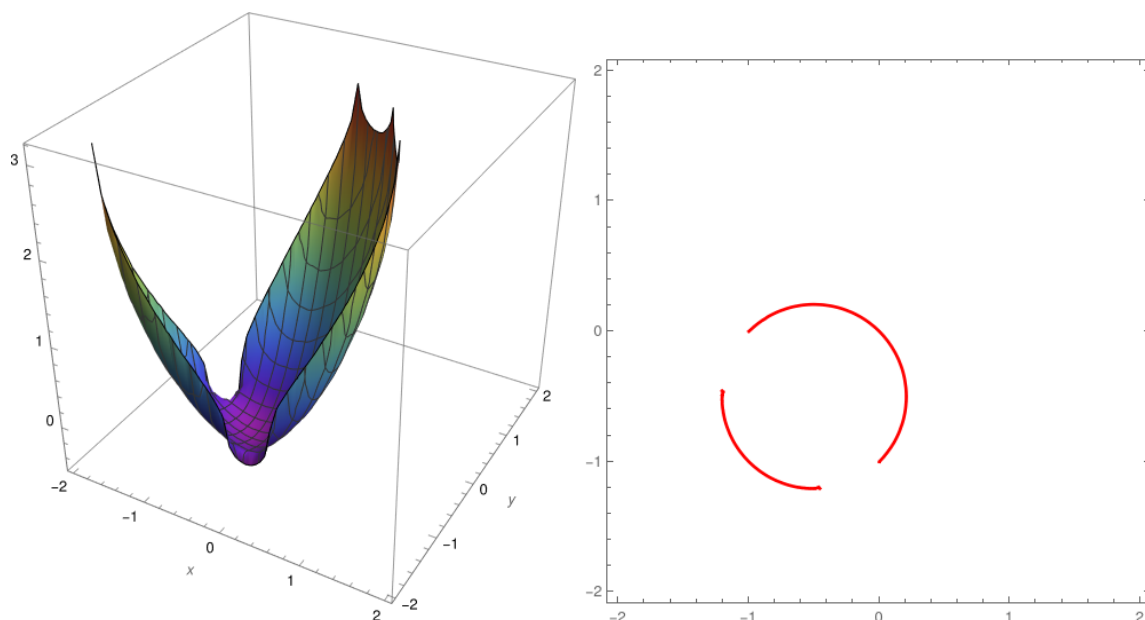
$$\begin{aligned} & (2y'y' + 2yy'')(1 - (x + y^2)^2)^{-\frac{1}{2}} + (1 + 2yy') \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - (x + y^2))^{-\frac{3}{2}} (-2(x + y^2)(1 + 2yy')) \\ &= -(y'' + 2)(1 - (y + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} - (y' + 2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - (y + x^2))^{-\frac{3}{2}} (-2(y + x^2)(y' + 2x)) \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(0) = -1$.

$$2 = -(y'' + 2)$$

Tedy

$$y''(0) = -4$$



(d) $\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

Řešení: Položme $F = \arctan(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$

ii. $F(0, 0) = 0 - 1 + 1 - 0 = 0$

iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1, \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.

Uvažujme původní rovnici

$$\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y' :

$$\frac{2yy' + y + xy'}{1 + (y^2 + xy)^2} = e^{xy}(y + xy') + \sin x + y'$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

$$0 = y'(0)$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$\frac{2yy' + y + xy'}{1 + (y^2 + xy)^2} = e^{xy}(y + xy') + \sin x + y'$$

Tedy

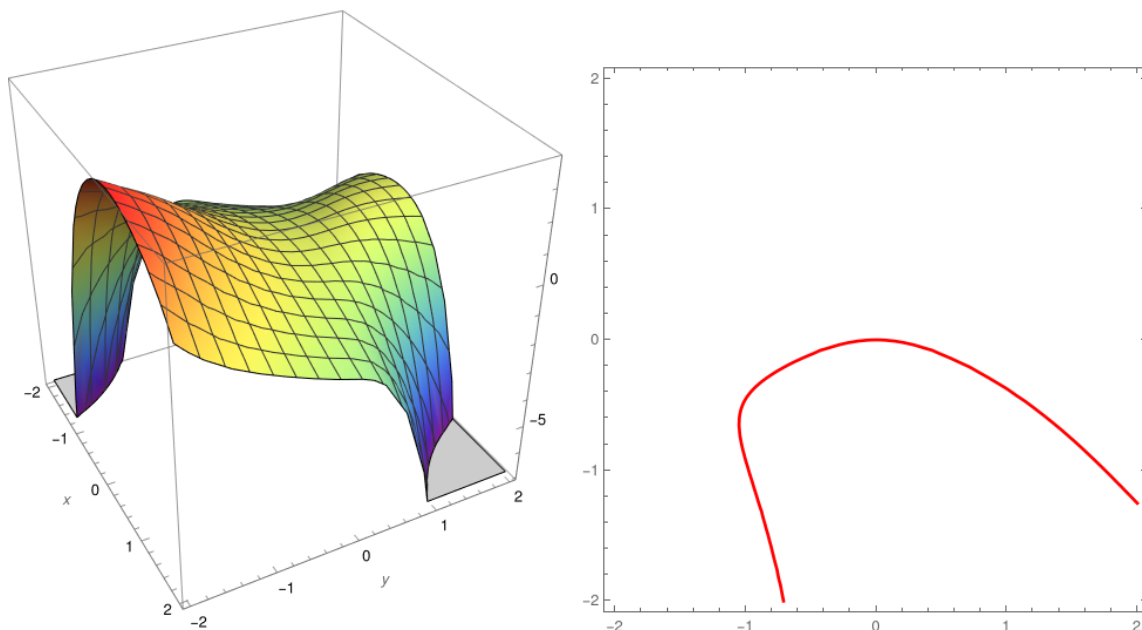
$$\frac{(2y'y' + 2yy'' + y' + y' + xy'')(1 + (y^2 + xy)^2) - (2yy' + y + xy')(2(y^2 + xy)(2yy' + y + xy'))}{(1 + (y^2 + xy)^2)^2} = e^{xy}(y + xy')^2 + e^{xy}(y' + y' + xy'') + \cos x + y''$$

Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$.

$$0 = 1 + y''$$

Tedy

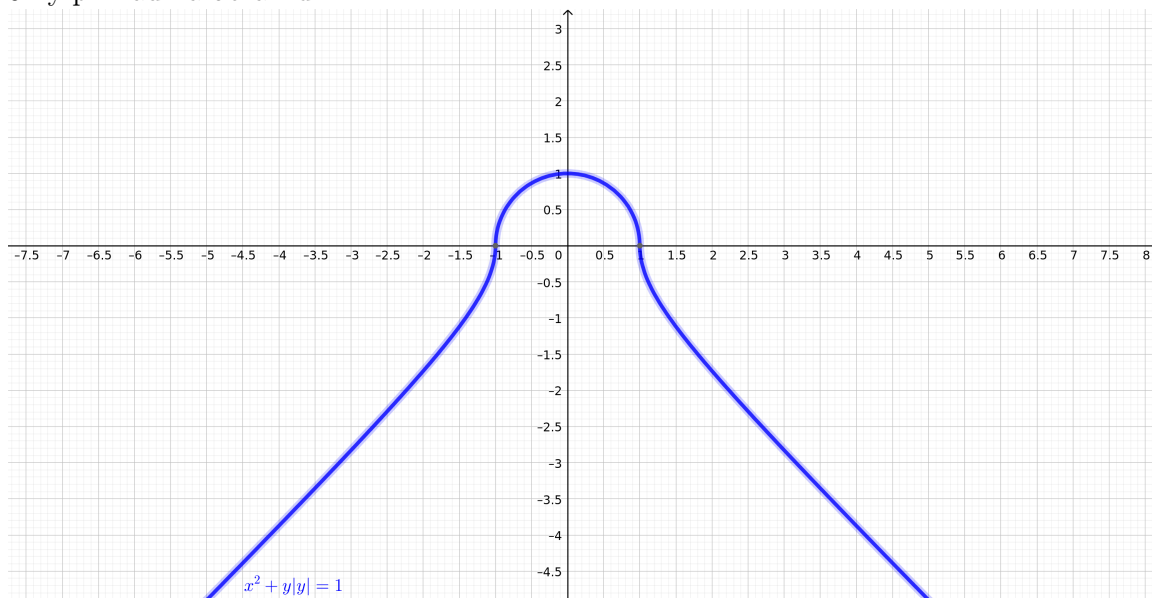
$$y''(0) = -1$$



Teorie

11. Rozhodněte, zda je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkci nutná. Dokážete sestavit funkci (alespoň obrázkem), u níž platí všechny předpoklady až na tento, a přesto platí závěr?

Řešení: Např. funkci $y = \sqrt[3]{x}$ lze napsat i jako implicitní funkci k rovnici $y^3 = x$. Pak v bodě $(0, 0)$ není splněna podmínka nenulové derivace, přesto jde zjevně o funkci. Jiný příklad na obrázku



12. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá. Řekneme, že f je parciálně spojitá, pokud pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá na $\mathbb{R}$ (jakožto funkce 1 proměnné), a pro každé $y_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $h(x) = f(x, y_0)$

spojitá na $\mathbb{R}$.

Řešení: Položme

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pak na $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 0]$ je f spojitá - podle aritmetiky a spojitosti.

V počátku platí: $f(0, y) = 0$ a $f(x, 0) = 0$, tedy je parciálně spojitá.

Ale pro $f(x, x) = \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$, tedy f jako taková spojitá není.

13. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale není v bodě $[0, 0]$ spojitá.

Řešení: Položme

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Derivace v počátku ve směru $v = (v_1, v_2)$ spočteme z definice

$$D_v(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tv_1(tv_2)^2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^4}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ale $f(x^2, x) = \frac{1}{2}$, tedy f není v $[0, 0]$ spojitá.

Jiný příklad: Nechť $f(x, y) = 1$, jestliže $y = x^2$, kde $x \neq 0$, v ostatních případech nechť je $f(x, y) = 0$.

Pak funkce je v počátku nespojitá, ale všechny směrové derivace existují a jsou 0.

14. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale neexistuje totální diferenciál $Df([0, 0])$.

Řešení: Jako předchozí příklad. Není-li totiž f spojitá, nemůže mít totální diferenciál.