



3. cvičení – Lineární ODR

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y' + y = e^x$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = 1$, $q(x) = e^x$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' + y = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.

Dále na intervalech $(a, b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned}y' + y &= 0 \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int -1 dx \\ \log |y| &= -x + c \\ |y| &= e^{-x+c} \\ |y| &= e^c e^{-x} \\ y &= \pm e^c e^{-x}\end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = ce^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'e^{-x} - ce^{-x}$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned}c'e^{-x} - ce^{-x} + ce^{-x} &= e^x \\ c'e^{-x} &= e^x \\ c' &= e^{2x} \\ c &= \frac{1}{2}e^{2x} + K\end{aligned}$$

- Závěr:

$$y = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + K \right) e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(b) $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -x$, $q(x) = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.

- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - xy = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.

Dále na intervalech $(a, b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$y' - xy = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$$

$$\log |y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c}$$

$$y = \pm e^c e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'e^{\frac{1}{2}x^2} + xce^{\frac{1}{2}x^2}$$

Dosadíme do původní rovnice

$$c'e^{\frac{1}{2}x^2} + xce^{\frac{1}{2}x^2} - xe^{\frac{1}{2}x^2} = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$$

$$c'e^{\frac{1}{2}x^2} = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$$

$$c' = e^x$$

$$c = e^x + K$$

- Závěr:

$$y = (e^x + K)e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(c) $y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 3$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = \frac{2}{x^3}$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' + \frac{3}{x}y = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.

Dále na intervalech $(a, b) = (-\infty, 0)$ (resp. $(0, \infty)$), $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$y' + \frac{3}{x}y = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{3}{x} dx$$

$$\log |y| = -3 \log |x| + c$$

$$|y| = e^c \frac{1}{|x|^3}$$

$$y = \pm e^c \frac{1}{x^3}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = c \frac{1}{x^3}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = \frac{c'}{x^3} - 3 \frac{c}{x^4}$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} \frac{c'}{x^3} - 3 \frac{c}{x^4} + \frac{3}{x} \cdot \frac{c}{x^3} &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{c'}{x^3} &= \frac{2}{x^3} \\ c' &= 2 \\ c &= 2x + K \end{aligned}$$

- Závěr:

$$y = \frac{2x + K}{x^3}, \quad x \in (-\infty, 0), x \in (0, \infty).$$

- Počáteční podmínky. Máme $y(1) = 3$. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{2 + K}{1^3} &= 3, \\ K &= 1. \end{aligned}$$

Tedy řešením je

$$y = \frac{2x + 1}{x^3}, \quad x \in (0, \infty).$$

(d) $y' = y + e^x$, $y(2) = -3$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -1$, $q(x) = e^x$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - y = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.

Dále na intervalech $(a, b) = \mathbb{R}$, $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int 1 dx \\ \log |y| &= x + c \\ |y| &= e^{x+c} \\ |y| &= e^c e^x \\ y &= \pm e^c e^x \end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = ce^x, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'e^x + ce^x$$

Dosadíme do původní rovnice

$$c'e^x + ce^x - ce^x = e^x$$

$$c'e^x = e^x$$

$$c' = 1$$

$$c = x + K$$

- Závěr:

$$y = (x + K)e^x, x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}.$$

- Počáteční podmínky. Máme $y(2) = -3$, tedy

$$(2 + K)e^2 = -3$$

$$K = \frac{-3 - 2e^2}{e^2}$$

$$K = \frac{-3}{e^2} - 2$$

Řešením je tedy

$$y = (x - 3e^{-2} - 2)e^x, x \in \mathbb{R}.$$

(e) $y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 1 + x^3, y(1) = -1$

Řešení:

- Máme funkce $p(x) = -\frac{3x^2}{1+x^3}, q(x) = 1 + x^3$. Jsou spojité na $(a, b) = (-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$, kde budeme hledat řešení.
- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 0.$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (a, b)$.

Dále na intervalech $(a, b), J_1 = (-\infty, 0),$ (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$$

$$\log |y| = \log |1+x^3| + c$$

$$|y| = e^{\log |1+x^3| + c}$$

$$|y| = e^c |1+x^3|$$

$$y = \pm e^c (1+x^3)$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$y = c(1+x^3), \quad c \in \mathbb{R}, x \in (a, b).$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'(1 + x^3) + 3cx^2$$

Dosadíme do původní rovnice

$$c'(1 + x^3) + 3cx^2 - \frac{3x^2}{1 + x^3}c(1 + x^3) = 1 + x^3$$

$$c' = 1$$

$$c = x + K$$

- Závěr:

$$y = (x + K)(1 + x^3), \quad x \in (-1, \infty), \text{ nebo } x \in (-\infty, -1)$$

- Počáteční podmínky. Máme $y(1) = -1$. Tedy

$$(1 + K)(1 + 1^3) = -1$$

$$K = -\frac{3}{2}$$

Tedy řešením je

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)(1 + x^3), \quad x \in (-1, \infty)$$

Zkouškové příklady

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$

(b) $y' - y \ln x = x^{x+1}$

(c) $y' + 3x^2y = e^{-x^3+x} \sin x$

(d) $y'(1 + x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1 + x^2)$

(e) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 1$

2
(a)

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}$$

$$x \neq 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln x + k$$

$$|y| = e^k \cdot e^{\ln \frac{1}{x}}$$

$$y = k \cdot \frac{1}{x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$k' \cdot \frac{1}{x} + k \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} \cdot k \cdot \frac{1}{x} = e^{x^2}$$

$$k' = x e^{x^2} \quad \text{subst.}$$

$$k = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$y_1 = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c \right) \quad x \in (0, \infty)$$

$$y_2 = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + d \right) \quad x \in (-\infty, 0)$$

(b)

$$y' - y \ln x = x^{x+1}$$

$$x^{x+1} = e^{(x+1) \ln x}$$

$$\boxed{x > 0}$$

$$\bullet \quad y = y \ln x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \ln x dx \quad \text{Per partes}$$

$$\ln |y| = x \ln x - x + k$$

$$|y| = e^{\ln x^x - x + k}$$

$$y = \underline{k e^{-x} x^x}$$

$$\bullet \quad y_p = k(x) e^{-x} x^x = k e^{-x} e^{x \ln x}$$

$$k' e^{-x} x^x + k (-e^{-x} x^x + e^{-x} x^x (\ln x + 1)) - k e^{-x} x^x \ln x = x^{x+1}$$

$$\underline{k' e^{-x} x^x = x^{x+1}}$$

$$k' = e^x \cdot x \quad \text{per partes}$$

$$\underline{k = e^x x - e^x + c}$$

allora $y = \underline{(e^x x - e^x + c) e^{-x} x^x} \quad x \in (0, \infty)$

(d)

$$y' + 3x^2 y = e^{-x^3+x} \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = -3x^2$$

$$\ln |y| = -x^3 + c$$

$$y = e^{-x^3} \cdot k \quad k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-x^3} \cdot k' + k e^{-x^3} (-3x^2) + 3x^2 k e^{-x^3} = e^{-x^3+x} \sin x$$

$$k' = e^x \sin x \quad \text{2x per partes}$$

$$k = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + c$$

$$y = e^{-x^3} \left(\frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + c \right) \quad x, c \in \mathbb{R}$$

(e)

$$y'(1+x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1+x^2)$$

$$y' + \frac{y}{\arctan x (1+x^2)} = x^2$$

$$x \in (-\infty, 0)$$

$$x \in (0, \infty)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{\arctan x (1+x^2)}$$

$$\ln|y| = -\ln|\arctan x| + k$$

$$y = \frac{k}{\arctan x} \quad x \neq 0$$

$$k' \frac{1}{\arctan x} + k \frac{-1}{\arctan^2 x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{k \cdot \frac{1}{\arctan x}}{\arctan x (1+x^2)} = x^2$$

$$k' = x^2 \arctan x \quad \text{per partes}$$

oder

$$\int x^2 \arctan x = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{2x^3}{1+x^2} dx$$

$$u = x^3 \quad v = \arctan x$$

$$u = 1+x^2$$

$$du = 2x dx$$

$$k = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} (1+x^2 - \ln(1+x^2)) + c \quad u = \frac{1}{3} x^3 \quad v' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{u-1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} (u - \ln u)$$

$$y = \frac{1}{\arctan x} \left[\frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} (1+x^2 - \ln(1+x^2)) + c \right]$$

$$x \neq 0$$

(f)

$$y' + \frac{x}{1+x^2} y = 1$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

$$y = k \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (= \frac{1}{2} (1+x^2)^{-1/2})$$

$$k' \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot 2x + \frac{xk}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$k' = \sqrt{1+x^2}$$

but spec. subst. $y = \sinh x$

weber Euler. subst.

maius

$$t = \sqrt{x^2+1} + x$$

$$\int \left(t - \frac{t^2-1}{2t}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2-1}{t^2}\right) dt$$

par (2. teubling)

$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$\sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t}$$

$$= \int \frac{2t^2-t^2+1}{2t} \cdot \frac{2t^2-t^2+1}{2t^2} dt$$

$$a \quad dx = \frac{2t \cdot 2t - (t^2-1) \cdot 2}{4t^2} dt$$

$$= \int \frac{(t^2+1) \cdot (t^2+1)}{4t^3} dt = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \ln t + \frac{-1}{2t^2} \right) \rightarrow$$

$$k = \frac{1}{8} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2 + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x^2+1} + x) - \frac{1}{8} \frac{1}{(\sqrt{x^2+1} + x)^2} + C$$

$$\text{par } y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[\right.$$

- 11 -

x G L

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (F)

LS 2003-2004, 17.9. 2004

Příklad F1: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x\sqrt{y} \quad (10 \text{ bodů}).$$

Příklad F2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 1. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + y' = x \sin x. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = e^{x+y} - 1. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F5: Najděte všechna $y^0 \in \mathbb{R}^3$ taková, že maximální řešení y počáteční úlohy

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = y^0$$

splňuje $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t} e^{-t} = 0.$ (10 bodů)

Výsledky

Příklad F1: $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}; y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, x \in \mathbb{R}, c > 0;$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \sqrt{-2c}), \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (\sqrt{-2c}, +\infty), \end{cases} \quad c \leq 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in (-\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad c \leq 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_1)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in \{-\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}\}, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_2)^2, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases} \quad c_1 \leq 0, c_2 \leq 0;$$

Příklad F2: $y(x) = \left(\frac{1}{8}(\sqrt{1+x^2}-x)^2 - \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2}-x) - \frac{1}{8}(\sqrt{1+x^2}-x)^2\right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$
 $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

Příklad F3: $y(x) = -\frac{3}{4}x \cos x - \frac{1}{4}x^2 \sin x + c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x, x \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Příklad F4: $y(x) = -\log(-x-c) - x, x \in (-\infty, -c), c \in \mathbb{R}$

Příklad F5: $\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; k \in \mathbb{R} \right\}$

finei substituice de

Bonus

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic s lepením

(a) $xy' - y = x^2$

Řešení:

- Pro původní rovnici je $x \in \mathbb{R}$. Převědeme na lineární rovnici:

$$y' - \frac{y}{x} = x.$$

Dále řešíme pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.

- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$.

Dále na intervalech $(a, b) = (-\infty, 0)$ (resp. $(a, b) = (0, \infty)$), $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned}y' - \frac{y}{x} &= 0 \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{1}{x} dx \\ \log |y| &= \log |x| + c \\ |y| &= e^{\log |x| + c} \\ |y| &= e^c |x| \\ y &= \pm e^c |x|\end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$\begin{aligned}y &= cx, & c \in \mathbb{R}, & x \in (-\infty, 0), \\ y &= dx, & d \in \mathbb{R}, & x \in (0, \infty)\end{aligned}$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c'x + c$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned}c'x + c - \frac{cx}{x} &= x \\ c' &= 1 \\ c &= x + K\end{aligned}$$

- Řešení:

$$\begin{aligned}y &= (x + K_1)x, & K_1 \in \mathbb{R}, & x \in (-\infty, 0), \\ y &= (x + K_2)x, & K_2 \in \mathbb{R}, & x \in (0, \infty)\end{aligned}$$

- Lepení: Zkusíme řešení slepit v bodě 0. Uvažujme funkci

$$y = \begin{cases} x(x + K_1), & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0 \\ x(x + K_2), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Aby funkce byla spojitá v 0, musí platit

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x(x + K_1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x(x + K_2),$$

což je splněno pro všechna K_1, K_2 .

Navíc musí být funkce diferencovatelná. Protože y je spojitá na $\mathbb{R}$, máme

$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x + K_1 = K_1 \\ y'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 2x + K_2 = K_2 \end{aligned}$$

Tedy $K_1 = K_2$.

- Závěr:

$$y = \begin{cases} x(x + K_1), & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0, \\ x(x + K_1), & x \in (0, \infty). \end{cases} \quad K_1 \in \mathbb{R},$$

(b) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$

Řešení:

- Pro původní rovnici je $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Převedeme na lineární rovnici:

$$y' - y \cot x = \cot x.$$

Dále řešíme pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi)$ a $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

- Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' - y \cot x = 0$$

Máme stacionární řešení $y = 0$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi)$ a $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.
Dále na intervalech $(a, b) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi)$ (resp. $(a, b) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$)
a $J_1 = (-\infty, 0)$, (resp. $J_2 = (0, \infty)$) vyřešíme

$$\begin{aligned} y' - y \cot x &= 0 \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \cot x dx \\ \log |y| &= \log |\sin x| + c \\ |y| &= e^{\log |\sin x| + c} \\ |y| &= e^c |\sin x| \\ y &= \pm e^c |\sin x| \end{aligned}$$

Spolu se stacionárním řešením lze psát

$$\begin{aligned} y &= c \sin x, & c \in \mathbb{R}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi) \\ y &= d \sin x, & d \in \mathbb{R}, & x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \end{aligned}$$

- Variace konstant. Máme

$$y' = c' \sin x + c \cos x$$

Dosadíme do původní rovnice

$$\begin{aligned} c' \sin x + c \cos x - c \sin x \cdot \cot x &= \cot x \\ c' &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ c &= -\frac{1}{\sin x} + K \end{aligned}$$

- Řešení:

$$y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K_1^k\right) \sin x = -1 + K_1^k \sin x, \quad K_1^k \in \mathbb{R}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi\right)$$

$$y = \left(-\frac{1}{\sin x} + K_2^k\right) \sin x = -1 + K_2^k \sin x, \quad K_2^k \in \mathbb{R}, \quad x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

- Lepení: Zkusíme řešení slepit v bodě $0 + k\pi$. Uvažujme funkci

$$y = \begin{cases} -1 + K_1^k \sin x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi\right) \\ -1, & x = 0 \\ -1 + K_2^k \sin x, & x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \end{cases}$$

Funkce je spojitá v $0 + k\pi$ pro všechna $K_1^k, K_2^k \in \mathbb{R}$.

Navíc musí být funkce diferencovatelná. Protože y je spojitá na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, máme

$$\begin{aligned} y'_-(0 + k\pi) &= \lim_{x \rightarrow 0 + k\pi^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0 + k\pi^-} K_1^k \cos x = K_1^k \\ y'_+(0 + k\pi) &= \lim_{x \rightarrow 0 + k\pi^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0 + k\pi^+} K_2^k \cos x = K_2^k \end{aligned}$$

Tedy $K_1^k = K_2^k$.

- Závěr:

$$y = \begin{cases} -1 + K_1^k \sin x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi\right) \\ -1, & x = 0, \quad K_1^k \in \mathbb{R} \\ -1 + K_1^k \sin x, & x \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \end{cases}$$

4. Položme

$$F(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Ukažte, že úloha

$$y' = F(y), \quad y(0) = 0,$$

nemá řešení na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$.

Řešení:

Z rovnice máme $y'(0) = F(0) = 1$. Tedy $y > 0$ na jistém intervalu $(0, \eta)$ (derivace je kladná, tedy funkce je rostoucí).

Zároveň na intervalu $(0, \eta)$ platí $y' = 0$, tedy y je konstantní. Dále y je spojitá funkce a $y(0) = 0$, tedy $y \equiv 0$ na $[0, \eta)$, což je spor.