



3. cvičení – Lineární ODR

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Lineární diferenciální rovnici prvního řádu* rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1)$$

kde p, q jsou funkce na daném intervalu (a, b) .

V dalším budeme předpokládat, že p, q jsou spojité funkce. Pak každé řešení rovnice (1) je třídy $\mathcal{C}^1$.

Homogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0.$$

Věta 2. Maximální řešení rovnice (1) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x q(t)e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

Algoritmus pro lineární ODR

1. Uvažujeme interval (a, b) , na kterém dále pracujeme, a upravíme rovnici na lineární.
2. Najdeme řešení y_H homogenní rovnice pomocí separace proměnných, nezapomeneme na konstantu. (Vyjde $e^{P(x)+c}$, kde $P(x) = \int p(x) dx$.)
3. Přepíšeme c na $c(x)$ - odeť je to funkce. Dosadíme do původní rovnice s pravou stranou.
4. Hodně se toho pokrátí, ze zbytku vyjádříme $c'(x)$ a spočteme $c(x)$. Tím najdeme y_P .
5. $y = y_H + y_P$ (Nebo prostě dosadíme za vyšlou konstantu.)
6. Je-li nutno, nalepíme - to se stává jen v případě, že původní rovnici bylo třeba upravit.
7. Případně aplikujeme podmínky.

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y' + y = e^x$

(d) $y' = y + e^x, y(2) = -3$

(b) $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$

(e) $y' - \frac{3x^2y}{1+x^3} = 1 + x^3, y(1) = -1$

(c) $y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3}, y(1) = 3$

Zkouškové příklady

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$

(d) $y'(1+x^2) + \frac{y}{\arctan x} = x^2(1+x^2)$

(b) $y' - y \ln x = x^{x+1}$

(e) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 1$

(c) $y' + 3x^2y = e^{-x^3+x} \sin x$

Bonus

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic s lepením

(a) $\text{✱✱} \quad xy' - y = x^2$

(b) $\text{✱} \quad y' \operatorname{tg} x - y = 1$

4. Položme

$$F(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Ukažte, že úloha

$$y' = F(y), \quad y(0) = 0,$$

nemá řešení na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$.