

(1) [1,0]

$$\sin(xy) + e^{x+y} - e = 0$$

$$F(x,y) = \sin(xy) + e^{x+y} - e \quad a = [1,0]$$

$$F \in C^1(\mathbb{R}^2) \quad (\text{sinus, expon., složení } C^1 \text{ fnc})$$

$$F(1,0) = \sin 0 + e^1 - e = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x + e^{x+y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 1 + e \neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(xy) y + e^{x+y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 0 + e$$

Paž  $\exists$  okolí  $U \subset \mathbb{R}$  bodu 1 a okolí  $V \subset \mathbb{R}$  bodu 0 tak že

$U \times V \subset \mathbb{R}^2$  a  $\forall x \in U \exists! y \in V$  s vlastností  $F(x,y) = 0$

Přesně-li  $y = f(x)$  paž  $f \in C^1(U)$  a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1) = - \frac{e}{1+e}$$

(2) lok. extr.

$$f(x,y) = 8xy - 2x^2y - 2xy^2$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8y - 4xy - 2y^2$$

$$\rightarrow 2y(4 - 2x - y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 8x - 2x^2 - 4xy$$

$$\swarrow y=0$$

$$\searrow y = 4 - 2x$$

$$8x - 2x^2 = 0$$

$$2x(4 - x) = 0$$

$$x=0 \quad x=4$$

$$8x - 2x^2 - 4x(4 - 2x) = 0$$

$$8x - 2x^2 - 16x + 8x^2 = 0$$

$$6x^2 - 8x = 0$$

$$2x(3x - 4) = 0$$

$$x=0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$y=4$$

$$y = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

body:  $[0,0]$ ,  $[4,0]$ ,  $[0,4]$ ,  $[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$

$$H_f = \begin{pmatrix} -4y & 8-4x-4y \\ 8-4x-4y & -4x \end{pmatrix}$$

$$\sim [0,0] \quad \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 8 \\ 8 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 64 \quad \lambda = \pm 8$$

indef  $\rightarrow$  není extrém

$$[0,4] \quad \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \quad D_1 < 0$$

$$D_2 = -64 < 0 \quad \text{indef} \rightarrow \text{není extrém}$$

$$[4,0] \quad \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{prohodím proměnné } x \text{ a } y$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} D_1 < 0 \\ D_2 = -64 < 0 \end{matrix}$$

indef  $\rightarrow$  není extrém

$$[4/3, 4/3] \quad \begin{pmatrix} -16/3 & -8/3 \\ -8/3 & -16/3 \end{pmatrix} \quad D_1 < 0$$

$$D_2 = \frac{256}{3} - \frac{64}{3} = 64 > 0$$

neg. def  $\rightarrow$  lok. max

(3) glob.  $f(x,y) = xy$   $M = 4x^2 + y^2 = 8$

• ke: elipsa  omezená:  $x^2 + y^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 8$

uzavřená:  $g = 4x^2 + y^2 = 8$   $M = g^{-1}(\{0\})$

vzta uz. mny při spoj. zobra

$\rightarrow M \nsubseteq U$

$\exists M \nsubseteq \text{žpt}$

$f$  je spoj (polynom)

$\} f$  na  $M$  nabývá extrémů

• Lagr. mult.

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  (polynomy)

$$\nabla g = (8x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow x=y=0 \quad [0,0] \notin M$$

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0$$

$$y + \lambda 8x = 0 \rightarrow y = -8\lambda x$$

$$x + \lambda 2y = 0$$

$$x + 2\lambda(-8\lambda x) = 0$$

$$4x^2 + y^2 = 8$$

$$x - 16\lambda^2 x = 0$$

$$x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

$$x = 0$$

$$y^2 = 8$$

$$[0, \sqrt{8}]$$

$$[0, -\sqrt{8}]$$

nesplnávajú

1. podmienka

$$\lambda = \pm \frac{1}{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \rightarrow y = -2x$$

$$4x^2 + 4x^2 = 8$$

$$x = \pm 1$$

$$y = \mp 2$$

$$\lambda = -\frac{1}{4} \rightarrow y = 2x$$

$$8x^2 = 8$$

$$x = \pm 1$$

$$y = \pm 2$$

$$[1, -2]$$

$$[-1, 2]$$

$$[1, 2]$$

$$[-1, -2]$$

$$f(0, \pm\sqrt{8}) = 0$$

$$f(\pm(1, 2)) = 2 \rightarrow \text{glob. max}$$

$$f(\pm(1, -2)) = -2 \rightarrow \text{glob. min}$$

$$(4) \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

$$(a) \quad A \text{ je 1. kategorie} \Leftrightarrow \bar{A} \text{ je Fichta}$$

Príklad

$$A \text{ je Fichta} \Leftrightarrow P \setminus \bar{A} \text{ je hustá.}$$

$$\bar{A} \text{ je Fichta, teda } P \setminus (\bar{A}) = P \setminus \bar{A} \text{ je hustá.}$$

Teda i A je Fichta.

Začleniť B je Fichta  $\Leftrightarrow B$  je spoč. sčítu. Fichta množina.

$\Rightarrow A$  je 1. kategorie (sčítu. sčítu. Fichta množina)

(b)

$\Rightarrow$

Príklad

$$\mathbb{Q} = \text{Spoč. sčítu. singletóny} \rightarrow \mathbb{Q} \text{ je 1. kategorie}$$

$$\text{ale } \mathbb{Q} \text{ není Fichta: } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$$