

2. zápočtová písemka – vzor

Čas k vypracování písemky je 45 minut. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby.

1. (6 bodů) Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(1) = 0$. Vypočtěte $f'(1)$.

$$\sin(xy) + e^{x+y} - e = 0$$

2. (6 bodů) Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = 8xy - 2x^2y - 2xy^2.$$

3. (6 bodů) Najděte všechny globální extrémy funkce

$$f(x, y) = xy$$

na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 8\}$$

Zdůvodněte existenci globálních extrémů.

4. (3 body) Rozhodněte o platnosti následujících výroků, tedy dokažte, nebo najděte protipříklad.

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$.

- (a) A je první kategorie $\Leftrightarrow \overline{A}$ je řídká.
- (b) A je první kategorie $\Rightarrow \overline{A}$ je řídká.