

2. cvičení – ODR se separovanými proměnnými + lepení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic (nezapomeňte na případná lepení):

(a) $y' = 2\sqrt{y}$

i. obecně

Řešení:

- Podmínky: $y > 0$
- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = 2\sqrt{y}$$

tedy $g(y) = 2\sqrt{y}$, $h(x) = 1$.

- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$ Rovnice má stacionární řešení

$$y_0 \equiv 0.$$

- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x) dx = \int 1 dx \stackrel{C}{=} x$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{2\sqrt{y}} \stackrel{C}{=} \sqrt{y}$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\sqrt{y} = x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J . Pak

$$\sqrt{y} = x + C$$

kde C je konstanta.

Zafixujme C . Máme $G(J) = (0, \infty)$.

Tedy hledáme taková x , aby

$$x + C > 0$$

což je splněno pro $x \in (-C, \infty)$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_1 = (x + C)^2$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y_1 = (x + C)^2, x \in (-C, \infty)$$

- Lepení: Řešení y_1 lze v bodě $-C$ slepit. Máme

$$\lim_{x \rightarrow -C+} y_1 = \lim_{x \rightarrow -C+} (x+C)^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow -C-} y_0$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

- ii. $y(4) = 1$;

Z počáteční podmínky máme

$$\begin{aligned} 1 &= (4+C)^2 \\ \pm 1 &= 4+C \\ -3 &= C_1 \end{aligned}$$

Tedy

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3), \\ 0, & x = 3, \\ (x-3)^2, & x \in (3, \infty), \end{cases}$$

Druhá možnost

$$-5 = C_2$$

by dala řešení

$$y = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 5), \\ 0, & x = 5, \\ (x-5)^2, & x \in (5, \infty), \end{cases}$$

které ale nesplňuje počáteční podmínku $y(4) = 1$.

- iii. $y(0) = -1$;

Řešení: Ze zadání máme podmínku $y > 0$, tedy tato počáteční podmínka nemůže nastat.

- iv. $y(1) = 0$;

Počáteční podmínku splňuje stacionární řešení $y \equiv 0$.

Dále je splněna pro všechna řešení

$$y_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ (x+C)^2, & x \in (-C, \infty), \end{cases}$$

kde $C \leq -1$.

(b) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

Řešení:

- Podmínky: $y > 0, x > 0$.
- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

tedy $g(y) = \sqrt{y}, h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (0, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$. Rovnice má stacionární řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (0, \infty).$$

- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \stackrel{C}{=} 2\sqrt{x}$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt{y}} \stackrel{C}{=} 2\sqrt{y}$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C$$

- Uvažujme intervaly I a J . Pak

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C$$

kde C je konstanta.

Zafixujme C . Máme $G(J) = (0, \infty)$.

Tedy hledáme taková x , aby

$$2\sqrt{x} + C > 0.$$

Je-li $C \geq 0$, je rovnice splněna triviálně. Tedy pro $x \in I = (0, \infty)$ vyjádříme řešení

$$y_1 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2} \right)^2, \quad x > 0, C \geq 0.$$

Je-li $C < 0$, tak

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} + C &> 0 \\ \sqrt{x} &> -\frac{C}{2} \\ x &> \left(-\frac{C}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_2 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2} \right)^2, \quad x > \frac{C^2}{4}, C < 0.$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (0, \infty)$$

$$y_1 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2} \right)^2, \quad x > 0, C \geq 0.$$

$$y_2 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2} \right)^2, \quad x > \frac{C^2}{4}, C < 0.$$

- Lepení: Řešení y_2 lze v bodě $\frac{C^2}{4}$ slepit. Máme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{C^2}{4}+} y_2 = \lim_{x \rightarrow \frac{C^2}{4}+} \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \frac{C^2}{4}+} \left(\frac{|C|}{2} + \frac{C}{2} \right)^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{C^2}{4}+} y_0 =$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_3 = \begin{cases} 0, & x \in (0, \frac{C^2}{4}), \\ 0, & x = \frac{C^2}{4}, \\ (\sqrt{x} + \frac{C}{2})^2, & x \in (\frac{C^2}{4}, \infty) \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (0, \infty).$$

$$y_1 = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2} \right)^2, \quad x > 0, C \geq 0.$$

$$y_3 = \begin{cases} 0, & x \in (0, \frac{C^2}{4}), \\ 0, & x = \frac{C^2}{4}, \\ (\sqrt{x} + \frac{C}{2})^2, & x \in (\frac{C^2}{4}, \infty) \end{cases} \quad C < 0$$

(c) $y' = \sqrt[3]{y}$

Řešení:

- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = \sqrt[3]{y}$$

tedy $g(y) = \sqrt[3]{y}$, $h(x) = 1$.

- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$ Rovnice má stacionární řešení

$$y_0 \equiv 0.$$

- Interval (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x) dx = \int 1 dx \stackrel{C}{=} x$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2}$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} = x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1 . Pak

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} = x + C$$

kde C je konstanta.

Zafixujme C . Máme $G(J) = (0, \infty)$.

Tedy hledáme taková x , aby

$$x + C > 0$$

což je splněno pro $x \in (-C, \infty)$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} &= x + C \\ \sqrt[3]{y^2} &= \frac{2}{3}(x + C) \\ |y| &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3} \end{aligned}$$

Na intervalu $J_1 = (-\infty, 0)$ je $y < 0$, tedy

$$y_1 = -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \quad x \in (-C, \infty).$$

- Uvažujme intervaly I a J_1 . Analogickým postupem dostaneme řešení

$$y_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \quad x \in (-C, \infty).$$

- Řešení:

$$\begin{aligned} y_0 &\equiv 0, x \in (-\infty, \infty) \\ y_1 &= -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \quad x \in (-C, \infty). \\ y_2 &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, \quad x \in (-C, \infty). \end{aligned}$$

- Lepení: Řešení y_1 i y_2 lze v bodě $-C$ slepit. Máme

$$\lim_{x \rightarrow -C+} y_{1,2} = \lim_{x \rightarrow -C+} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3} = 0 = \lim_{x \rightarrow -C-} y_0$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_{3,4} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3}, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_{3,4} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -C), \\ 0, & x = -C, \\ \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x+C)\right)^3}, & x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

(d) $y' = yx$

Řešení:

- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = yx$$

tedy $g(y) = y$, $h(x) = x$.

- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$ Rovnice má stacionární řešení

$$y_0 \equiv 0.$$

- Interval (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x) dx = \int x dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{y} \stackrel{C}{=} \log |y|$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\log |y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1 . Pak

$$\log |y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

kde C je konstanta.

Zafixujme C . Máme $G(J_1) = (-\infty, \infty)$.

Tedy hledáme taková x , aby

$$x + C \in \mathbb{R}$$

což je splněno pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$\log |y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

Protože jsme na intervalu J_1 , dostáváme řešení

$$y_1 = -e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

- Analogicky na intervalech J_2, I dostaneme řešení

$$y_2 = e^{\frac{1}{2}x^2+C}$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y_{1,2} = \pm e^{\frac{1}{2}x^2+C}, x \in (-\infty, \infty)$$

- Lepení: Tento příklad slepit nelze, všechna řešení už jsou maximální.

(e) $y' = \sqrt{1-y^2}$

Řešení:

- Podmínky: $1-y^2 > 0$
- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

tedy $g(y) = \sqrt{1-y^2}$, $h(x) = 1$.

- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = \pm 1$ Rovnice má stacionární řešení

$$y_{0,1} \equiv \pm 1.$$

- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (-1, 1)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x) dx = \int 1 dx \stackrel{C}{=} x$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \stackrel{C}{=} \arcsin y$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\arcsin y = x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J . Pak

$$\arcsin y = x + C$$

kde C je konstanta.

Zafixujme C . Máme $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Tedy hledáme taková x , aby

$$-\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2}$$

což je splněno pro $x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_2 = \sin(x + C)$$

- Řešení:

$$y_{0,1} \equiv \pm 1, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y_2 = \sin(x + C), x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$$

- Lepení: Řešení y_2 lze v bodě $-\frac{\pi}{2} - C$ a $\frac{\pi}{2} - C$ slepit. Máme

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} - C+} y_2 = \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} - C+} \sin(x + C) = \pm 1 = \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} - C+} y_{0,1}$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_3 = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - C), \\ -1, & x = -\frac{\pi}{2} - C, \\ \sin(x + C), & x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} - C, \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2} - C, \infty), \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_{0,1} \equiv \pm 1, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_3 = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - C), \\ -1, & x = -\frac{\pi}{2} - C, \\ \sin(x + C), & x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} - C, \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2} - C, \infty), \end{cases}$$

(f) $y'y = x^3$

Řešení:

- Podmínky:
- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = \frac{x^3}{y}$$

tedy $g(y) = \frac{1}{y}$. $h(x) = x^3$.

- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod původní rovnice (než jsme ji upravili) je

$$y = 0.$$

Řešení $y_0 \equiv 0$ ale nesplňuje diferenciální rovnici. Stacionární řešení tudíž rovnice nemá.

- Interval (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.

- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x) dx = \int x^3 dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4}x^4$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int y \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}y^2$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^4 + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1 . Pak

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^4 + C$$

kde C je konstanta.

Zafixujme C . Máme $G(J_1) = (0, \infty)$.

Tedy hledáme taková x , aby

$$\frac{1}{4}x^4 + C > 0$$

Pro $C > 0$ je splněno triviálně, tedy $x \in (-\infty, \infty)$.

Pro $C \leq 0$ vyjdou intervaly $(-\infty, -\sqrt[4]{-4C})$ a $(\sqrt[4]{-4C}, \infty)$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$|y| = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$

Na intervalu J_1 pak dostaneme

$$y = -\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$

- Pro intervaly I a J_2 postupujeme analogicky a získáme řešení

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}$$

- Řešení:

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

$$y_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4C}), C \leq 0$$

$$y_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (\sqrt[4]{-4C}, \infty), C \leq 0.$$

- Lepení: Slepít lze pouze řešení pro $C = 0$ (se sebou navzájem). Máme totiž

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt[4]{-4 \cdot 0}^-} y_{3,4} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt[4]{-4 \cdot 0}^-} \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2 \cdot 0} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[4]{-4 \cdot 0}^+} y_{5,6} = \lim_{x \rightarrow \sqrt[4]{-4 \cdot 0}^+} \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2 \cdot 0} = 0$$

Díky lemmatu o lepení tedy máme řešení

$$y_{7,8,9,10} = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (-\infty, 0), \\ \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

- Závěr: Máme řešení

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

$$y_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (-\infty, -\sqrt[4]{-4C}), C < 0$$

$$y_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2C}, x \in (\sqrt[4]{-4C}, \infty), C < 0.$$

$$y_{7,8,9,10} = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (-\infty, 0), \\ \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^4}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

(g) $y' = x\sqrt[3]{y^2}$ **Řešení:**

- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = x\sqrt[3]{y^2}$$

tedy $g(y) = \sqrt[3]{y^2} \ h(x) = x$.

- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y = 0$. Rovnice má stacionární řešení

$$y_0 \equiv 0.$$

- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x) \, dx = \int x \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \stackrel{C}{=} 3\sqrt[3]{y}$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1 . Pak

$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

kde C je konstanta.

Zafixujme C . Máme $G(J) = (-\infty, 0)$.

Tedy hledáme taková x , aby

$$\frac{1}{2}x^2 + C < 0.$$

To může nastat jen pro $C < 0$. Pak $x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C})$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_1 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3$$

- Uvažujme intervaly I a J_2 . Pak

$$3\sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

kde C je konstanta.

Zafixujme C . Máme $G(J) = (0, \infty)$.

Tedy hledáme taková x , aby

$$\frac{1}{2}x^2 + C > 0.$$

Pro $C > 0$ je splněno triviálně, tedy $x \in \mathbb{R}$.

Pro $C \leq 0$ dostaneme $x \in (-\infty, -\sqrt{-2C})$ a $x \in (\sqrt{-2C}, \infty)$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3$$

- Řešení:

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), C < 0$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \leq 0$$

$$y_4 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, x \in (\sqrt{-2C}, \infty), C \leq 0$$

- Lepení: Řešení y_1 , y_3 a y_4 lze v bodech $\mp\sqrt{-2C}$ slepit. Máme

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{-2C}+} y_1 = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{-2C}+} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3 = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{-2C}-} y_1 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{-2C}-} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{-2C}-} y_3 = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{-2C}-} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3 = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{-2C}+} y_4 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{-2C}+} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3 = 0$$

Díky lemmatu o lepení půjdou řešení hladce nalepit (ve více kombinacích).

- Závěr: Máme řešení

$$y_0 \equiv 0, x \in (-\infty, \infty).$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, x \in (-\infty, \infty), C > 0$$

a dále slepená řešení

$$y_5 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \leq 0 \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, \infty) \end{cases}$$

$$y_6 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), C \leq 0 \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, & x \in [-\sqrt{-2C}, \infty) \end{cases}$$

$$y_7 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, & x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), C < 0 \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D, E \leq 0$, kde $C \geq D \geq E$, máme

$$y_8 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, & x \in (-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2D}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2E}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, & x \in (-\sqrt{-2E}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \leq 0$, kde $C \geq D$, máme

$$y_9 = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2C}, -\sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C \right)^3, & x \in (-\sqrt{-2D}, \sqrt{-2D}), \\ 0, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \leq 0$, kde $C \geq D$, máme

$$y_{10} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

Pro $C, D \leq 0$, $C \geq D$ máme

$$y_{11} = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2C}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2C}, \sqrt{-2D}], \\ \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}C\right)^3, & x \in (\sqrt{-2D}, \infty), \end{cases}$$

2. Příklady ze starších písemek.

(a) $y' = x\sqrt[3]{1-y}$

(b) $y' = x\sqrt{y}$

(c) $y' \sin x = 2y \ln y$

(d) $y' = xe^{-y}\sqrt[3]{e^y-1}$

2a $y' = x \sqrt[3]{1-y} \rightarrow g(y)$
 $I = \mathbb{R}$ $h(x)$ $\mathbb{R}$

$y_0 \equiv 1$ na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-y}} dy = \int x dx$$

$g(y) \neq 0$ na $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) = \mathbb{J}$

$$-\frac{3}{2}(1-y)^{2/3} = \frac{1}{2}x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{(1-y)^2} = -\frac{x^2}{3} + c \rightarrow \text{musi być } > 0$$

$\nearrow$
 $\geq 0 \quad (1-y)^2 = (c - \frac{x^2}{3})^3$

$$(1-y) = \pm \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3}$$

$$1 \pm \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3} = y \quad c \in \mathbb{R} \quad ; \quad c \geq \frac{x^2}{3} \quad \sqrt{3c} \geq |x|$$

rozważ: $\bullet \quad c \leq 0$ nie ma (przebiegi / 1 boczny doł. obr.)

$\bullet \quad c > 0 \rightarrow \begin{aligned} &x < \sqrt{3c} \\ &x > -\sqrt{3c} \end{aligned} \quad x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c})$

$\bullet$ pro $x \rightarrow \pm \sqrt{3c}$ dostajemy $\lim_{x \rightarrow \pm \sqrt{3c}} 1 \pm \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3} = 1$

$\rightarrow$ brzośne leżą

celem

$y_0 \equiv 1 \quad x \in \mathbb{R}$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 + \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 - \sqrt{(c - \frac{x^2}{3})^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

$$(2b) y' = x\sqrt{y}$$

$$f(y) = \sqrt{y}$$

$$h(x) = x$$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} = I$$

$$(2) y_0 = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(3) g \neq 0 \text{ me } (0, \infty) = J$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int x dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + k \rightarrow \text{musi } k \geq 0$$

$$(G(J)) = (0, \infty)$$

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2$$

$$2\sqrt{y} (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$\frac{x^2}{4} + k > 0$$

$$x^2 > -4k$$

$$|x| > \sqrt{-4k}$$

(5) Rozbor:

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2, k > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$k \leq 0$$

$$x > \sqrt{-4k}$$

$$x \in (\sqrt{-4k}, \infty)$$

$$-\sqrt{-4k}$$

$$\sqrt{-4k}$$

$$x < -\sqrt{-4k}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$$

(6) Závěr:

$$y_0 = 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y_1 = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ pro } k > 0$$

(nelze slepota,
máme ji max.)

$$y_2 = \begin{cases} 0 \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}]$$

$$k \leq 0$$

$$x \in (-\sqrt{-4k}, \infty)$$

$$y_3 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \\ 0 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$$

$$x \in [-\sqrt{-4k}, \infty)$$

$$y_4 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \\ 0 \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$$

$$[-\sqrt{-4k}, \sqrt{-4k}]$$

$$(\sqrt{-4k}, \infty)$$

2c

$$y' \sin x = 2y \ln y$$

"jázo" $y' = \underbrace{2y \ln y}_{g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{h(x)} \rightarrow x \in \underbrace{(0 + k\pi, \pi + 2k\pi)}_I \quad k \in \mathbb{Z}$

$\hookrightarrow$ nulové body $y=0 \rightarrow$ nelze zúžit logaritmu
 $y=1$
 $J = (0, 1)$
 $= (1, \infty)$

$$\int \frac{1}{2y \ln y} dy = \int \frac{1}{\sin x} dx \rightarrow \text{rychlost minul (5d)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \ln |\ln y|}_{G(y)} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$G(0, 1) = \mathbb{R}$$

$$G(1, \infty) = \mathbb{R}$$

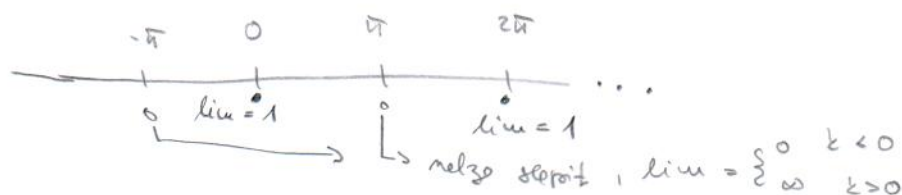
$\hookrightarrow \cos x \neq 1 \quad x \neq 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
 $\cos x \neq -1 \quad x \neq \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\ln |\ln y| = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C$$

$$|\ln y| = \underbrace{e^C}_{>0} \cdot \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right|$$

$$\ln y = \underbrace{e^C}_{\in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)$$

pročeme $z_c(x) := y = e^{e^C \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)} \quad e^C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$



$$x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

$$x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zähler

$$y_0 \equiv 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y_1 = \begin{cases} 1 \\ z_k(x) \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, 2k\pi]$$

$$x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y_2 = \begin{cases} z_k(x) \\ 1 \end{cases}$$

$$x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$$

$$x \in [2\pi + 2k\pi, \infty)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y_3 = \begin{cases} z_{\ell_1}(x) \\ 1 \\ z_{\ell_2}(x) \end{cases}$$

$$x \in (\pi + 2\ell_1\pi, 2\pi + 2\ell_1\pi)$$

$$x \in [2\pi + 2\ell_1\pi, 2\pi + 2\ell_2\pi]$$

$$x \in (2\pi + 2\ell_2\pi, 3\pi + 2\ell_2\pi)$$

$$\ell_{1,2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\ell \in \mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$$

2d

$$y' = \underbrace{x e^{-y}}_{h(x)} \underbrace{\sqrt[3]{e^y - 1}}_{g(y)}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y_0 \equiv 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g \neq 0 \quad \text{na} \quad (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{J}$$

$$\int \frac{e^y}{\sqrt[3]{e^y - 1}} dy = \int x dx$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{(e^y - 1)^2} = \frac{x^2}{2} + k$$

$\in (0, \infty)$

$$\sqrt[3]{(e^y - 1)^2} = \frac{x^2}{3} + k \quad \rightarrow \text{musí být } > 0$$

$$(e^y - 1)^2 = \left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3$$

! pozor při odmocňování

$$e^y = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} > 0$$

rozbor

$$y = \ln \left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} \right)$$

$k > 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow y = \ln \left(1 + \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} \right)$$

$$k \leq 0 \quad x \in (-\infty, -\sqrt{3-3k}) \rightarrow$$

$$x \in (\sqrt{3-3k}, \infty) \rightarrow$$

pro $\ln \left(1 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} \right)$ máme:

$$k \leq 0:$$



$$1 > \frac{x^2}{3} + k$$

$$3 - 3k > x^2 > 0$$

tedy funguje pro

$$|k| < 1$$

$$|x| < \sqrt{3-3k}$$

tedy $0 < k < 1$

pro $k \leq 0$

$$y = \ln \left(1 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{3} + k\right)^3} \right), \quad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k})$$

$$x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{3k})$$

$$x \in (\sqrt{3k}, \sqrt{3-3k})$$

Bez Lepen:

$$y_0 = 0$$

$$x \in \mathbb{R};$$

$$y_1 = \ln(1 + \sqrt{\quad}) \quad x \in \mathbb{R}, \quad k > 0$$

$$y_2 = \ln(1 - \sqrt{\quad}) \quad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k}); \quad k \in (0, 1)$$

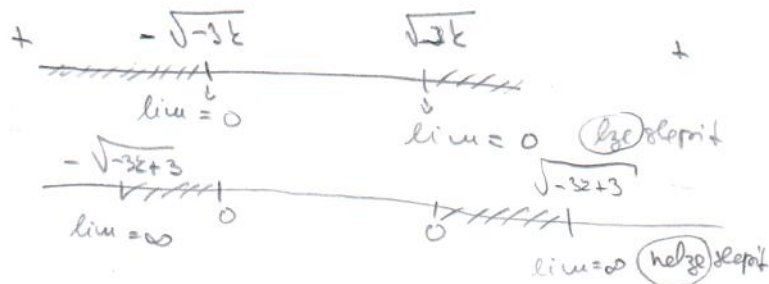
$\hookrightarrow$ melze slopit, $\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{3-3k}} = \infty$

Lepen:

spučet

$$z_k^+(x) = \ln(1 + \sqrt{\quad}) \quad k \leq 0;$$

$$z_k^-(x) = \ln(1 - \sqrt{\quad})$$



Kombinace: $k \leq 0 \quad k \leq 0$

$$y = \begin{cases} z_k^+(x) & x \in (-\infty, -\sqrt{3-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{3-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^-(x) & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{3-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{3-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, \sqrt{3-3k}] \\ z_k^+(x) & x \in (\sqrt{3-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, \sqrt{3-3k}] \\ z_k^-(x) & x \in (\sqrt{3-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{3-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k}] \\ z_k^- & x \in (\sqrt{3-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{3-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k}] \\ z_k^- & x \in (\sqrt{3-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{3-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k}] \\ z_k^+ & x \in (\sqrt{3-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{3-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k}] \\ z_k^+ & x \in (\sqrt{3-3k}, \infty) \end{cases}$$