1

$$y' = \frac{-x}{y}$$

1 $g(y) = \frac{1}{y}$ $h(x) = -x$

$J_1 = (-\infty, 0)$ $I = \mathbb{R}$

$J_2 = (0, \infty)$

g spoj. na J_1, J_2

h spoj. I

stac. řešení fce nemá

1 $\int y\,dy = \int -x\,dx$

$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$

$G(y)$ $H(x) + c$

2 $G(-\infty, 0) = (0, \infty)$

$G(0, \infty) = (0, \infty)$

$-\frac{1}{2}x^2 + c > 0$

$c > \frac{1}{2} \cdot x^2$ lze jen pro $c > 0$

$2c > x^2$

$\sqrt{2c} > |x|$

1

Pak $y^2 = -x^2 + 2c$

$y = \pm\sqrt{-x^2 + 2c}$

1

Závěr: $y_1 = \sqrt{-x^2+2c}$ $x \in (-\sqrt{2c}, \sqrt{2c})$ $c > 0$

$y_2 = -\sqrt{-x^2+2c}$ $x \in$ - " -

Slepit nelze

2 $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 3$ $y(0) = 4$

1 $y' = -\frac{y}{x}$

pracujeme na $(-\infty, 0), (0, \infty)$

tam je $\frac{1}{x}$ i x^2+3 spoj.

$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{x}\,dx$

$\ln|y| = -\ln|x| + c$ $c \in \mathbb{R}$

$$|y| = \frac{1}{|x|} e^{c}$$

(1) $$y = k \cdot \frac{1}{x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

variace konst.

$$y' = k' \frac{1}{x} + k \frac{-1}{x^2}$$

dosazení

(1) $$k' \frac{1}{x} - \cancel{\frac{k}{x^2}} + \cancel{\frac{1}{x} k \frac{1}{x}} = x^2 + 3$$

$$k' = x^3 + 3x$$

$$k = \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 + d$$

(1)

Řešení: $$y = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 + d \right) = \frac{d}{x} + \frac{1}{4} x^3 + \frac{3}{2} x$$

(1) $$y(2) = 4 = \frac{d}{2} + \frac{1}{4} 8 + \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{d}{2} + 5$$

$$-1 = \frac{d}{2} \qquad d = -2$$

(1)

Závěr $$y = \frac{-2}{x} + \frac{1}{4} x^3 + \frac{3}{2} x \qquad x \in (0, \infty)$$

(3) $$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 9x + 3$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y_H = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

(1)+(1) $$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3$$

$$9x^2 - 9x + 3 = e^{0x} \left((9x^2 - 9x + 3) \cos 0x + 0 \sin 0x \right)$$

(1) $0 + 0i$ není kořen

$$y_P = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_P' = 2Ax + B$$

$$y_P'' = 2A$$

(1) $2A - 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) = 9x^2 - 9x + 3$

$2A - 6B + 9C = 3$ $\qquad 2 - 2 + 9C = 3$ $\qquad C = 1/3$

$-12Ax + 9Bx = -9x$ $\qquad -12 + 9B = -9$ $\qquad 9B = 3$ $\qquad B = 1/3$

$9Ax^2 = 9x^2$ $\qquad A = 1$

(1) Pak $y_p = x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

Dohromady

(1) $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \qquad c_{1,2}, x \in \mathbb{R}$

(4) (a) $A' \subseteq \bar{A}$

Platí.

Sporem: Nechť $\exists\, a \in A'$ & $a \notin \bar{A}$.

Rozbor případů: • $a \in A$ → nemůže nastat, protože $\bar{A} = A \cup \partial A$, tedy pak $a \in \bar{A}$

• $a \notin A$

protože $a \notin \bar{A}$, tak máme buď

(1) $\exists\, r > 0: B(x,r) \cap A = \emptyset$, nebo

(2) $\exists\, r > 0: B(x,r) \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

Protože $a \notin A$, tak (2) nemůže nastat, tedy

$\exists\, r > 0: B(x,r) \cap A = \emptyset$

což je spor s definicí A' $(\forall \varepsilon > 0 \ (B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq 0$

Tedy máme spor.

(b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

"$\supseteq$" Nechť $x \in A' \cup B'$. Pak BÚNO $x \in A'$. Tedy $\forall \varepsilon > 0 \ (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, tedy $x \in (A \cup B)'$.

"$\subseteq$" Nechť $x \in (A \cup B)'$. Tedy $\forall \varepsilon > 0 \ (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$
Zvolme $y \in (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B)$. Pak buď $y \in A$ nebo $y \in B$.
Odtud $B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq 0$ nebo $B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap B \neq 0$.

Tedy $x \in A' \cup B'$.