1. cvičení – Obyčejné diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic

   (a) $y'/y = 4x$, $y(0) = 3$

   Řešení:

   - Podmínky: $y \neq 0$
   - Budeme řešit rovnici tvaru
     $$y' = y \cdot 4x$$
     tedy $g(y) = y$, $h(x) = 4x$.
   - Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
   - Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y \equiv 0$ je v rozporu s podmínkami. Rovnice tedy nemá stacionární řešení.
   - Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
   - Řešení ODR:
     $$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int 4x\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} 2x^2$$
     $$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{y} \overset{C}{=} \log|y|$$
     Tedy budeme pracovat s rovnicí
     $$\log|y| = 2x^2 + C$$
   - Uvažujme intervaly I a J_1. Pak
     $$\log|y| = 2x^2 + C$$
     kde C je konstanta.
     Zafixujme C. Máme $G(J_1) = (-\infty, \infty)$.
     Tedy hledáme taková x, aby
     $$2x^2 + C \in \mathbb{R},$$
     což je splněno pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{R}$.
     Pro taková x vyjádříme řešení
     $$|y| = e^{2x^2+C},$$
     Protože jsme na intervalu $J_1 = (-\infty, 0)$, tak $|y| = -y$ a máme
     $$y = -e^{2x^2+C}.$$

- Uvažujme intervaly I a J_2. Pak

$$\log|y| = 2x^2$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J_2) = (-\infty, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$2x^2 + C \in \mathbb{R},$$

což je splněno pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{R}$.
Pro taková x vyjádříme řešení

$$|y| = e^{2x^2+C},$$

Protože jsme na intervalu $J_2 = (0, \infty)$, tak $|y| = y$ a máme

$$y = e^{2x^2+C}.$$

- Závěr:
$$y_{1,2} = \pm e^{2x^2+C}, \qquad x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$$
- Počáteční podmínka: máme $y(0) = 3$. Tedy

$$e^{2\cdot 0^2+C} = 3$$
$$C = \log 3$$

Řešení je tedy tvaru
$$y = e^{2x^2+\log 3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(b) $y' = 4xy$
Řešení: Jde o variaci na předchozí příklad, od kterého se liší existencí stacionárního řešení. Tedy
$$y \equiv 0$$

na $x \in \mathbb{R}$.
Všechna řešení pak mají tvar

$$y_1 \equiv 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$y_{2,3} = \pm e^{2x^2+C}, \qquad x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}.$$

(c) $y'/y^2 = e^x$, $y(0) = \frac{1}{2}$
Řešení:
- Podmínky: $y \neq 0$
- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = y^2 e^x$$

tedy $g(y) = y^2$, $h(x) = e^x$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.

- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y \equiv 0$ je v rozporu s podmínkami. Rovnice tedy nemá stacionární řešení.
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int e^x\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} e^x$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{y}$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$-\frac{1}{y} = e^x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_1. Pak

$$-\frac{1}{y} = e^x + C,$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J_1) = (0, \infty)$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$e^x + C > 0.$$

Tedy $e^x > -C$. Dostáváme podmínky

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & C \geq 0, \\ x \in (\log(-C), \infty), & C < 0. \end{cases}$$

Pro taková x vyjádříme řešení

$$y = -\frac{1}{e^x + C}.$$

- Uvažujme intervaly I a J_2. Pak

$$-\frac{1}{y} = e^x + C,$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J_2) = (-\infty, 0)$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$e^x + C < 0.$$

Tedy $e^x < -C$. Dostáváme podmínky

$$\begin{cases} \text{nelze}, & C \geq 0, \\ x \in (-\infty, \log(-C)), & C < 0. \end{cases}$$

Pro taková x vyjádříme řešení

$$y = -\frac{1}{e^x + C}.$$

- Závěr:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -\frac{1}{e^x + c_1},\ x \in \mathbb{R},\ c_1 \geq 0,\\
y_2 &= -\frac{1}{e^x + c_2},\ x \in (\log(-c_2), \infty),\ c_2 < 0,\\
y_3 &= -\frac{1}{e^x + c_3},\ x \in (-\infty, \log(-c_3)),\ c_3 < 0.
\end{aligned}
$$

- Počáteční podmínka: máme $y(0) = \frac{1}{2}$. Tedy

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{e^0 + C} &= \frac{1}{2}\\
-2 &= C + 1\\
C &= -3
\end{aligned}
$$

Řešení je tedy tvaru

$$
y = -\frac{1}{e^x - 3}, \qquad x \in (-\infty, \log 3).
$$

(d) $y'/y = 1/(x-1)$, načrtněte
Řešení:

- Podmínky: $y \neq 0$, $x \neq 1$
- Budeme řešit rovnici tvaru

$$
y' = \frac{y}{x-1}
$$

tedy $g(y) = y$, $h(x) = \frac{1}{x-1}$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I_1 = (-\infty, 1)$, $I_2 = (1, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y \equiv 0$ je v rozporu s podmínkami. Rovnice tedy nemá stacionární řešení.
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$
H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \log|x-1|
$$

$$
G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{y} \overset{C}{=} \log|y|
$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$
\log|y| = \log|x-1| + C
$$

- Uvažujme intervaly I_1 a J_1. Pak

$$
\log|y| = \log|x-1| + C
$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J_1) = (-\infty, \infty)$.

Tedy hledáme taková x, aby

$$\log|x-1| + C \in \mathbb{R}.$$

což je splněno pro každé $x \in I_1$ a $C \in \mathbb{R}$.
Pro taková x vyjádříme řešení

$$|y| = e^{\log|x-1|+C}$$

Protože jsme na intervalu $J_1 = (-\infty, 0)$, tak $|y| = -y$ a máme

$$y = -e^{\log|x-1|+C}$$

- Uvažujme intervaly I_1 a J_2. Analogickým postupem dostaneme

$$y = e^{\log|x-1|+C}.$$

Pro I_2 a J_1 je

$$y = -e^{\log|x-1|+C}$$

a pro I_2 a J_2 je

$$y = e^{\log|x-1|+C}$$

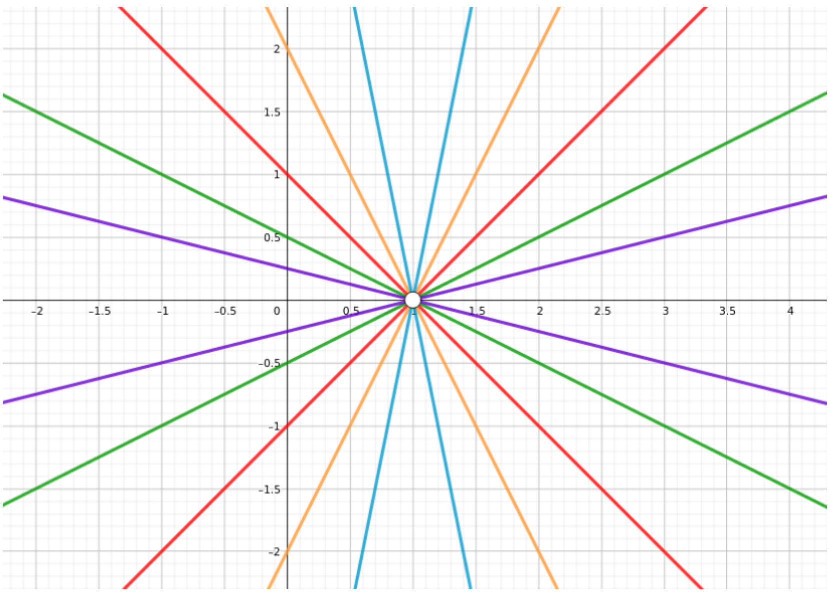
- Závěr:

$$y_{1,2} = \pm e^{\log|x-1|+C}$$

pro $x \in (-\infty, 1)$, $x \in (1, \infty)$, $C \in \mathbb{R}$.

- Náčrtek řešení: rovnici nejprve upravíme jako

$$y = \pm e^{\log|x-1|+C} = \pm e^{\log|x-1|} e^C = \pm|x-1| e^C$$



2. Příklady ze starších písemek
   (a) $y' = xe^x y$, $y(1) = 1$
   Řešení:
   - Budeme řešit rovnici tvaru
   $$y' = y \cdot xe^x$$
   tedy $g(y) = y$, $h(x) = xe^x$.
   - Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
   - Nulové body funkce $g(y)$: Jediný nulový bod $y \equiv 0$. Tedy pro $x \in \mathbb{R}$ má rovnice stacionární řešení $y \equiv 0$.
   - Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
   - Řešení ODR:
   $$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} xe^x - e^x$$
   $$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{y} \stackrel{C}{=} \log|y|$$
   Tedy budeme pracovat s rovnicí
   $$\log|y| = xe^x - e^x + C$$
   - Uvažujme intervaly I a J_1. Pak
   $$\log|y| = xe^x - e^x + C$$
   kde C je konstanta.
   Zafixujme C. Máme $G(J_1) = (-\infty, \infty)$.
   Tedy hledáme taková x, aby
   $$xe^x - e^x + C \in \mathbb{R},$$
   což je splněno pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{R}$.
   Pro taková x vyjádříme řešení
   $$|y| = e^{xe^x - e^x + C}$$
   Protože jsme na intervalu $J_1 = (-\infty, 0)$, tak $|y| = -y$ a máme
   $$y = -e^{xe^x - e^x + C}$$
   - Uvažujme intervaly I a J_2. Pak analogickým postupem získáváme řešení
   $$y = e^{xe^x - e^x + C}$$
   pro $x \in \mathbb{R}$.

- Závěr: všechna řešení jsou tvaru

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \pm e^{xe^x - e^x + C}, \qquad && x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}, \\ y_3 &\equiv 0, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Počáteční podmínka: máme $y(1) = 1$. Tedy

$$\begin{aligned} e^{e^1 - e^1 + C} &= 1 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Řešení je tedy tvaru

$$y = e^{xe^x - e^x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

(b) $y'(1 + x^2) = (1 + y^2)$

Řešení:

- Podmínky: $y \neq 0$
- Budeme řešit rovnici tvaru

$$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$$

tedy $g(y) = 1 + y^2$, $h(x) = 1 + x^2$.

- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$ nemá.
- Interval (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J = (-\infty, \infty)$.
- Řešení ODR:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \arctan x$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{1 + y^2} \stackrel{C}{=} \arctan y$$

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$\arctan y = \arctan x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J. Pak

$$\arctan y = \arctan x + C$$

kde C je konstanta.
Zafixujme C. Máme $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Tedy hledáme taková x, aby

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x + C < \frac{\pi}{2}.$$

Řešení lze najít pouze pro $C \in (-\pi, \pi)$. Pak

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &< \arctan x + C && < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} - C &< \arctan x && < \frac{\pi}{2} - C \end{aligned}$$

Rozlišíme různá C.

i. $C \in (0, \pi)$. Pak $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + C$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dále máme podmínku

$$\arctan x < \frac{\pi}{2} - C$$
$$x < \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

ii. $C \in (-\pi, 0)$. Pak $\arctan x + C < \frac{\pi}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dále máme podmínku

$$-\frac{\pi}{2} - C < \arctan x$$
$$\tan\left(-\frac{\pi}{2} - C\right) < x$$

iii. $C = 0$. Pak $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$y = \tan(\arctan x + C)$$

- Závěr: Řešení jsou tvaru

$$\begin{aligned}
y_1 &= \tan(\arctan x + C), && x \in \left(-\infty, \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right)\right), C \in (0, \pi),\\
y_2 &= \tan(\arctan x + C), && x \in \left(\tan\left(-\frac{\pi}{2} - C\right), \infty\right), C \in (-\pi, 0),\\
y_3 &= \tan(\arctan x) = x, && x \in \mathbb{R}, (C = 0).
\end{aligned}$$

(c) $y' = \sin x \sin y$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$

Řešení:

- Budeme řešit rovnici tvaru
$$y' = \sin y \sin x$$
tedy $g(y) = \sin y$, $h(x) = \sin x$.
- Řešení hledáme na intervalech (pro x): $I = (-\infty, \infty)$.
- Nulové body funkce $g(y)$: $\sin y = 0$ právě pro $y = k\pi$. Máme tedy stacionární řešení $y \equiv k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), pro $x \in \mathbb{R}$.
- Intervaly (pro y), kde g je nenulové (ale definované): $J_k = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$.
- Řešení ODR:
$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\cos x$$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} = \int \frac{1}{\sin y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\sin y}{\sin^2 y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\sin y}{1 - \cos^2 y}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1 + \cos y}{1 - \cos y}\right|$$

(Integrál lze vyřešit substitucí $z = \cos y$ a následně rozkladem na parciální zlomky.)

Tedy budeme pracovat s rovnicí

$$-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1 + \cos y}{1 - \cos y}\right| = -\cos x + C$$

- Uvažujme intervaly I a J_k. Pak

$$-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\cos y}{1-\cos y}\right| = -\cos x + C$$

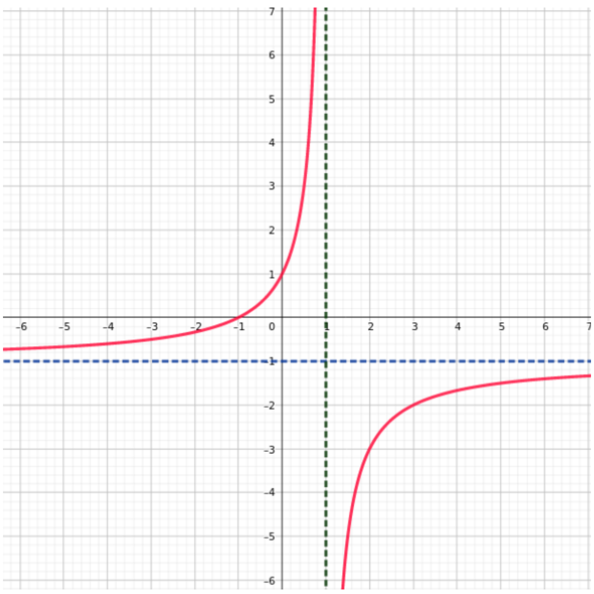
kde C je konstanta.
Zafixujme C. Hledáme $G(J_k)$.
Pro $y \in J_k$ je $\cos y \in (-1,1)$. Uvažujme funkci

$$f(s) = \frac{1+s}{1-s}, \qquad s \in (-1,1).$$

Máme

$$f(s) = \frac{1+s}{1-s} = \frac{-1+s+2}{1-s} = -1 + \frac{2}{1-s}$$

Graf:



Odtud

$$f((-1,1)) = (0,\infty).$$

Tedy pro $y \in J_k$ je

$$\left(\frac{1+\cos y}{1-\cos y}\right)(J_k) = (0,\infty)$$

a tedy

$$G(J_k) = \mathbb{R}.$$

Tedy hledáme taková x, aby

$$-\cos x + C \in \mathbb{R},$$

což je splněno pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $C \in \mathbb{R}$.

Pro taková x vyjádříme řešení

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\cos y}{1-\cos y}\right| &= -\cos x + C\\
\log\left|\frac{1+\cos y}{1-\cos y}\right| &= 2\cos x - 2C\\
\left|\frac{1+\cos y}{1-\cos y}\right| &= e^{2\cos x - 2C}
\end{aligned}$$

Máme $\frac{1+\cos y}{1-\cos y} > 0$, tedy

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos y}{1-\cos y} &= e^{2\cos x - 2C}\\
1+\cos y &= e^{2\cos x-2C}(1-\cos y)\\
\cos y &= \frac{e^{2\cos x-2C}-1}{e^{2\cos x-2C}+1}\\
y &= \arccos\left(\frac{e^{2\cos x-2C}-1}{e^{2\cos x-2C}+1}\right)
\end{aligned}$$

- Závěr:

$$\bar{y} = \arccos\left(\frac{e^{2\cos x-2C}-1}{e^{2\cos x-2C}+1}\right), \qquad x\in\mathbb{R}, C\in\mathbb{R}$$

$$y_k \equiv k\pi, x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$$

- Počáteční podmínka: máme $y(0) = \frac{\pi}{2}$.
  Stacionární řešení poč. podmínku nemohou splnit.
  Tedy

$$\begin{aligned}
\arccos\left(\frac{e^{2\cos 0-2C}-1}{e^{2\cos 0-2C}+1}\right) &= \frac{\pi}{2}\\
\frac{e^{2-2C}-1}{e^{2-2C}+1} &= 0\\
e^{2-2C} &= 1\\
2-2C &= 0\\
C &= 1
\end{aligned}$$

Řešení je tedy tvaru

$$y = \arccos\left(\frac{e^{2\cos x-2}-1}{e^{2\cos x-2}+1}\right), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

3. Je nalezena zkamenělá kost, u které se podařilo určit, že obsahuje 0.1% hmotnosti C-14, než kterou obsahovala původně. Určete stáří fosilie, víte-li, že poločas rozpadu C-14 je 5730 let.
   Řešení: Nejprve odvodíme diferenciální rovnici, která popisuje obsah uhlíku C-14 v kosti.
   Nechť funkce $y(t)$ (závislá na čase v letech) je množství uhlíku v kosti. Víme, že v čase $t=0$ je obsah roven 100%. V čase $t=5730$ je množství poloviční, tedy

$$y(5730) = \frac{1}{2}y(0).$$

Dále, množství částic uhlíku, které se rozpadnou v čase t závisí na množství částic, které v kosti jsou. Dokonce je toto množství přímo úměrné. Změna počtu částic (změna množství uhlíku za nekonečně malý čas) je tedy přímo úměrná počtu částic, které jsou v kosti v daném konkrétním čase. Tedy máme diferenciální rovnici

$$y'(t) = -ky(t),$$

kde k je zatím neznámá konstanta. Protože částic ubývá, v rovnici se objeví minus.
Rovnici vyřešíme: $g(y) = y$, $h(t) = -k$. Interval $I = (-\infty, \infty)$. (Při řešení zatím zanedbáme fakt, že čas t by neměl být záporný.)
Stacionární řešení $y \equiv 0$. To by ovšem znamenalo konstantně nulové množství uhlíku, což v kosti není možné.
Intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$. Protože y má význam množství, které nemůže být záporné, uvažujeme pouze interval $J_2 = (0, \infty)$.

$$H(x) = \int -k \,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} -kt,$$

$$G(y) = \int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y \stackrel{C}{=} \log|y|.$$

Tedy pracujeme s rovnicí

$$\log|y| = -kt + C.$$

Máme $G(J_2) = (-\infty, \infty)$, lze uvažovat $t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.
Vyjádříme y:

$$\begin{aligned}
\log|y| &= -kt + C \\
|y| &= e^{-kt+C} \\
y &= e^{-kt+C} \\
y &= e^C e^{-kt}
\end{aligned}$$

Dopočteme konstanty:

$$\begin{aligned}
y(5730) = e^C e^{-k5730} &= \frac{1}{2} e^C e^{-k0} = y(0) \\
e^{-k5730} &= \frac{1}{2} \\
-k5730 &= \log\frac{1}{2} \\
k &= \frac{\log 2}{5730}
\end{aligned}$$

Tedy řešení je tvaru

$$y(t) = e^C e^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

Pro jednoduchost položme $y(0) = 1$ (1 ve smyslu 100%). Pak $C = 0$ a máme

$$y(t) = e^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

Nyní hledáme takové t, že $y(t) = 0.0001$. Tedy

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\log 2}{5730}t} &= 0.0001 \\ -\frac{\log 2}{5730}t &= \log 0.0001 \\ t &= 5730\frac{\log 1000}{\log 2} \\ t &\doteq 57104 \end{aligned}$$

Kost je tedy stará zhruba 57 100 let.

4. Do uzavřeného školního kampusu o 1000 studentech přijel jeden z nich s chřipkou. Předpokládejme, že rychlost šíření infekce závisí jak na množství již nakažených studentů, tak na množství dosud zdravých. Určete množství studentů nakažených 6. den, pokud víte, že po čtyřech dnech bylo nakaženo již 50 studentů. (Odpovídající diferenciální rovnice: $y' = ky(1000 - y)$, $y(0) = 1$, $y(4) = 50$.)
Řešení: Vyřešíme diferenciální rovnici. Funkce $g(y) = y(1000 - y)$, $h(x) = k$. Interval $I = (-\infty, \infty)$.
Stacionární řešení $y \equiv 0$, $y \equiv 1000$. Interval $J = (0, 1000)$. (Jiné intervaly nemá smysl uvažovat, protože počet nakažených studentů nemůže být záporný, ani větší než 1000, což je maximální počet studentů v kampusu.)
Řešení rovnice:
$$H(x) = \int k \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} kx$$
$$G(y) = \int \frac{1}{y(1000-y)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1000}\int \frac{1}{y} + \frac{1}{(1000-y)}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} \frac{1}{1000}(\log|y| - \log|1000-y|)$$
$$= \frac{1}{1000}\log\frac{|y|}{|1000-y|}$$
Pracujeme tedy s rovnicí
$$\frac{1}{1000}\log\frac{|y|}{|1000-y|} = kx + C$$
Na intervalu $J = (0, 1000)$ navíc platí $G(J) = (-\infty, \infty)$ a $|y| = y$ a $|1000-y| = 1000-y$. Dostáváme
$$\begin{aligned} \frac{1}{1000}\log\frac{y}{1000-y} &= kx + C \\ \log\frac{y}{1000-y} &= 1000(kx + C) \\ \frac{y}{1000-y} &= e^{1000(kx+C)} \\ y &= (1000-y)e^{1000(kx+C)} \\ y &= \frac{1000e^{1000(kx+C)}}{1+e^{1000(kx+C)}} \end{aligned}$$
Máme $y(0) = 1$, $y(4) = 50$. Dopočteme tedy konstanty.
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1000e^{1000C}}{1+e^{1000C}} \\ \frac{1}{999} &= e^{1000C} \end{aligned}$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\frac{1000}{999}e^{1000(kx)}}{1+\frac{1}{999}e^{1000(kx)}}\\
y &= \frac{1000e^{1000(kx)}}{999+e^{1000(kx)}}\\
y &= \frac{1000}{1+999e^{-1000(kx)}}
\end{aligned}
$$

dále

$$
\begin{aligned}
50 &= \frac{1000}{1+999e^{-1000(4k)}}\\
e^{-1000(4k)} &= \frac{19}{999}\\
-1000(k) &= \frac{1}{4}\log\frac{19}{999}\\
-1000k &\doteq -0.9906
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
y(x) \doteq \frac{1000}{1+999e^{-0.9906x}}
$$

Za 6 dní bude množství nakažených studentů rovno zhruba

$$
y(6) \doteq 276.
$$