

Kalkulus 3, zimní semestr 2025-2026

Přednáška

1. ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

1.1. Prostor $\mathbb{C}$.

Definice. Prostor $\mathbb{C}$ je $\mathbb{R}^2$ (s obvyklým sčítáním, násobením skalárem, Eukleidovskou normou), v němž je navíc definováno násobení

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac - bd, ad + bc].$$

(Obvykle píšeme jako $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.)

Ztotožňujeme $[x, 0] = x$, tzn. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Značíme $i = [0, 1]$ *imaginární jednotku*.

Poznámky. (1) Komplexní číslo $[a, b]$ lze psát jako $a + bi$. Např. násobení pak píšeme jako $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

(2) Platí

$$i^2 = -1, \quad (-i)^2 = -1.$$

(3) Pro $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, značíme

- $\operatorname{Re} z = a$, reálná část čísla z .
- $\operatorname{Im} z = b$, imaginární část čísla z .
- $\bar{z} = a - bi$, číslo komplexně sdružené k z .
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, absolutní hodnota čísla z .
- goniometrický tvar komplexního čísla $z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.
- $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

(4) Nerovnosti v $\mathbb{C}$ nezavádíme.

1.2. Derivace komplexních funkcí. Značení. Necht' $r > 0$, $a \in \mathbb{C}$, pak

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\},$$

$$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\},$$

$$D'(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}.$$

Definice. Necht' (X, ρ) je metrický prostor, $E \subseteq X$. Řekneme, že E *není souvislá*, pokud existují neprázdné množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $E = A \cup B$, $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. Řekneme, že E je *souvislá*, pokud rozklad E jako výše neexistuje (E není nesouvislá).

Definice. Necht' $E \subseteq \mathbb{C}$. Řekneme, že E je *oblast*, pokud je E neprázdná, otevřená a souvislá.

Značení. V této kapitole bude Ω značit otevřenou podmnožinu $\mathbb{C}$.

Komplexní funkcí budeme rozumět funkci $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definice. Necht' f je komplexní funkce na Ω . Necht' $z_0 \in \Omega$. Pak *derivaci funkce f v bodě z_0* definujeme vztahem

$$(1.1) \quad f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

pokud tato limita existuje. Řekneme, že f je *holomorfní (nebo analytická)* v Ω , pokud $f'(z_0)$ existuje pro všechna $z_0 \in \Omega$. Množinu všech holomorfních funkcí na množině Ω značíme $\mathcal{H}(\Omega)$.

Poznámka. (i) Necht $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pak $f + g \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$ a věta o derivaci součtu a součinu platí ve stejné podobě jako pro derivaci v $\mathbb{R}$.

(ii) Je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$, $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, pak složená funkce $h = g \circ f$ splňuje $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $h'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$, $z_0 \in \Omega$.

Příklady. • $f(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$, pak $f'(z) = 0$ pro $z \in \mathbb{C}$, a tedy $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

- Je-li $n \in \mathbb{N}$, pak $f(z) = z^n$ je holomorfní na $\mathbb{C}$ a $f'(z) = nz^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.
- Funkce $\exp$, $\sin$, $\cos$ jsou holomorfní na $\mathbb{C}$ a platí $\exp'(z) = \exp z$, $\sin'(z) = \cos z$, $\cos'(z) = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = \frac{1}{z}$ je holomorfní na $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$.

Poznámky. (1) Prostor $\mathbb{R}^2$ je 2-dimenzionální lineární prostor nad $\mathbb{R}$, obvykle s bází $[1, 0]$, $[0, 1]$.

Lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(2) Prostor $\mathbb{C}$ je 1-dimenzionální lineární prostor nad $\mathbb{C}$, obvykle s bází 1.

Lineární zobrazení $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ má tvar

$$z \mapsto w \cdot z,$$

kde $w \in \mathbb{C}$, tedy $z = x + iy$, $w = a + bi$, tedy $wz = ax + iay + ibx - by$, neboli

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Věta 1 (Cauchyovy–Riemannovy podmínky). *Necht f je komplexní funkce na Ω . Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, tj.*

$$f(a + ib) = \tilde{f}_1(a, b) + i\tilde{f}_2(a, b), \quad a + ib \in \Omega.$$

Necht $z = a + ib \in \Omega$.

(i) *Pokud $f'(z)$ existuje, pak existují obě parciální derivace funkcí $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ v bodě (a, b) a platí Cauchyovy–Riemannovy podmínky*

$$(1.2) \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b) \quad a \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b).$$

Navíc $f'(z) = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) + i\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b)$.

(ii) *Pokud mají obě funkce $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ spojitě parciální derivace a platí (1.2), pak $f'(z)$ existuje.*

Příklad. $(e^z)' = e^z$

1.3. Elementární funkce.

1.3.1. *Exponenciální funkce.* Pro $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ definujme exponenciální funkci

$$\exp z = e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Poznámky. (1) $(e^z)' = e^z$

(2) $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

(3) $e^z \neq 0$ pro $z \in \mathbb{C}$

(4) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(5) $\exp$ je periodická s periodou $2\pi i$, $e^z = e^w$ právě tehdy, když $w = z + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

(6) označme $P = \{z \in \mathbb{C}, -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$. Pak $\exp|_P$ je prostá.

1.3.2. *Goniometrické funkce.* Funkce $\sin$ a $\cos$ definujeme předpisem

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkce $\exp$, $\sin$, $\cos$ jsou spojité na $\mathbb{C}$.

Poznámky. (1) $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$

(2) $\sin$, $\cos$ jsou 2π -periodické, známé vzorce platí

(3) $\sin(\mathbb{C}) = \cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, tedy $\sin$ a $\cos$ nejsou omezené

1.3.3. *Argument komplexního čísla.* Je-li $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, značíme *argument komplexního čísla*

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\varphi}\}.$$

Jediný $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} \cap (-\pi, \pi]$ nazveme *hlavní hodnotou argumentu* z a značíme $\arg z = \varphi_0$.

Poznámky. (1) $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $z \neq 0$.

(2) $\arg z$ je konstantní na každé polopřímce vycházející z počátku

1.3.4. *Logaritmus.* Necht' $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Funkce $\log z = (\exp|_P)^{-1}$ se nazývá *hlavní hodnota logaritmu*.

Dále značíme *logaritmus*

$$\operatorname{Log} z = \{w \in \mathbb{C} : \exp w = z\}.$$

Poznámky. (1) pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je $\log z := \log |z| + i \arg z$ a $\operatorname{Log} z = \{\log z + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $\log z : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow P$ je prostá a na.

(3) $\log$ není spojitý nikde v $(-\infty, 0]$

(4) $(\log z)' = \frac{1}{z}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

1.3.5. *Mocniny.* Je-li $\alpha \in \mathbb{C}$ a $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak definujeme *hlavní hodnotu α -té mocniny* z jako

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$$

a α -tou mocninu z

$$M_\alpha(z) = \{\exp(\alpha w), w \in \operatorname{Log} z\}.$$

Poznámky. (1) Pro $\alpha \in \mathbb{N}$ jde vlastně o polynomy, jsou spojité i holomorfní v $\mathbb{C}$, $(z^n)' = z^{n-1}$.

(2) Pro $\alpha \in \mathbb{Z}$ platí, že $M_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$ a z^α je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $(z^\alpha)' = z^{\alpha-1}$.

(3) Pro obecné $\alpha \in \mathbb{C}$ je z^α holomorfní funkce na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.

(4) $M_\alpha(z) = \{z^\alpha e^{2\alpha k\pi i}, k \in \mathbb{Z}\}$

(5) Je-li $\alpha \in \mathbb{Q}$ a $\alpha = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná, pak

$$M_{\frac{p}{q}} = \{z^{\frac{p}{q}} e^{2\frac{p}{q}k\pi i}, k = 0, 1, \dots, q-1\}$$

tvoří vrcholy pravidelného q -úhelníka se středem v 0.

Příklady. (1) $\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$, $M_{\frac{1}{2}} = \{\pm i\}$

(2) $\sqrt[3]{-1} = e^{\frac{1}{3}\pi i} = i$, $M_{\frac{1}{3}} = \{-1, e^{\pm \frac{1}{3}\pi i}\}$

1.4. Mocninné řady.

Definice. Mocninou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, kde $c_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $z \in \mathbb{C}$.

Fakt. Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ je mocninná řada. Pak existuje číslo $R \in [0, \infty]$ (poloměr konvergence mocninné řady) takové, že řada konverguje absolutně a stejnoměrně na $\overline{D}(a, r)$, $r < R$, a

diverguje, pokud $z \notin \overline{D}(a, R)$. Číslo R je dáno vztahem $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, přičemž výraz $\frac{1}{0}$ chápeme jako ∞ a výraz $\frac{1}{\infty}$ chápeme jako 0.

_____ konec přednášky 1.12.2023

Řekneme, že funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou v Ω , pokud pro každý kruh $D(a, r) \subseteq \Omega$ existuje mocninná řada, která konverguje k $f(z)$ pro všechna $z \in D(a, r)$.

Věta 2 (derivace mocninné řady). *Předpokládejme, že funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou v Ω . Pak $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a funkci f' lze rovněž vyjádřit mocninnou řadou v Ω . Navíc, pokud*

$$(1.3) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in D(a, r),$$

pak

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in D(a, r).$$

Důsledek. *Předpokládejme, že funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou v Ω . Pak f má v Ω derivace všech řádů a platí-li vztah (1.3), pak*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}, \quad z \in D(a, r).$$

Speciálně tedy $c_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

1.5. Integrace podél cesty.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Křivkou v X rozumíme spojitě zobrazení γ uzavřeného intervalu $[\alpha, \beta]$ ($-\infty < \alpha < \beta < \infty$) do X . Označme $\gamma^* = \gamma([\alpha, \beta]) = \{\gamma(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$.

Řekneme, že γ je uzavřená křivka, pokud její počáteční bod $\gamma(\alpha)$ splývá s koncovým bodem $\gamma(\beta)$.

Cesta je po částech spojitě diferencovatelná křivka v $\mathbb{C}$ (tj. existuje konečná posloupnost $\alpha = s_0 < s_1 < \dots < s_n = \beta$ bodů z $[\alpha, \beta]$ taková, že γ má spojitou derivaci na (s_{j-1}, s_j) , $j = 1, \dots, n$, a γ' má v krajních bodech tohoto intervalu vlastní jednostranné limity).

Uzavřená cesta je uzavřená křivka, která je zároveň cestou.

Nechť γ je cesta a nechť f je spojitá funkce na γ^* . Definujeme integrál funkce f podél cesty γ jako

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Pozorování. Nechť φ je prostá a spojitě diferencovatelná funkce na $[\alpha_1, \beta_1]$, $\varphi([\alpha_1, \beta_1]) = [\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha_1) = \alpha$, $\varphi(\beta_1) = \beta$. Položme $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$. Pak $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$ (integrál nezávisí na parametrizaci).

Definice. Nechť $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ je cesta. Pak opačnou cestou k γ rozumíme cestu $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Pozorování. Je-li γ_1 opačná cesta k γ a f je spojitá na $\gamma_1^* = \gamma^*$, pak $\int_{\gamma_1} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$.

Pozorování. Je-li γ cesta a f je spojitá na γ^* , pak $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \|f\|_{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$, kde $\|f\|_{\infty}$ značí maximum f na γ^* . Výraz $\int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$ nazýváme délkou cesty γ .

Příklady. (a) Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Pak cestu $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, nazýváme kladně orientovaná kružnice se středem a a poloměrem r . Platí $\int_{\gamma} f(z) dz = ir \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{it} dt$.

(b) Necht' $a, b \in \mathbb{C}$. Pak cestu $\gamma(t) = a + (b - a)t$, $0 \leq t \leq 1$, nazýváme orientovaný interval $[a, b]$. Platí $\int_{[a,b]} f(z) dz = (b - a) \int_0^1 f(a + (b - a)t) dt$. Opačná cesta k $[a, b]$ je $[b, a]$.

(c) Necht' $\{a, b, c\}$ je uspořádaná trojice komplexních čísel. Pak $\Delta = \Delta(a, b, c)$ je trojúhelník s vrcholy a, b, c . Definujeme $\int_{\partial\Delta} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$. Pokud $\Delta' = \Delta'(a, c, b)$, pak $\int_{\partial\Delta'} f = -\int_{\partial\Delta} f$.

Věta 3 (o indexu bodu vzhledem ke křivce). *Necht' γ je uzavřená cesta a necht' Ω je doplněk γ^* . Definujeme*

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}, \quad z \in \Omega.$$

Pak funkce Ind_γ nabývá na Ω celočíselných hodnot, je konstantní na každé komponentě Ω a je rovna 0 na neomezené komponentě Ω .

Funkci $\text{Ind}_\gamma(z)$ nazýváme index bodu z vzhledem ke křivce γ .

_____ konec přednášky 7.12.2023

Příklad. Necht' γ je kladně orientovaná kružnice se středem a a poloměrem r , pak

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & |z - a| < r, \\ 0, & |z - a| > r. \end{cases}$$

1.6. Lokální Cauchyova věta.

Věta 4 (integrál derivace podél uzavřené cesty). *Necht' $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a F' je spojitá v Ω . Pak $\int_\gamma F'(z) dz = 0$ pro každou uzavřenou cestu γ v Ω .*

Důsledek. • *Necht' γ je uzavřená cesta, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak $\int_\gamma z^n dz = 0$.*

• *Nect' γ je uzavřená cesta taková, že $0 \notin \gamma^*$, $n = -2, -3, -4, \dots$. Pak $\int_\gamma z^n dz = 0$.*

Věta 5 (Cauchyova věta pro trojúhelník). *Necht' Δ je trojúhelník v Ω , $p \in \Omega$, f je spojitá na Ω a $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Pak $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.*

Věta 6 (Cauchyova věta pro konvexní množinu). *Necht' $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je konvexní otevřená, $p \in \Omega$, f je spojitá na Ω a $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Pak $f = F'$ pro nějakou $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Speciálně tedy $\int_\gamma f(z) dz = 0$ pro každou uzavřenou cestu γ v Ω .*

Příklad. Necht' $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ a necht' γ je kladně orientovaná kružnice o středu -1 a poloměru $\frac{1}{2}$. Pak $\int_\gamma f(z) dz = -2\pi i$.

Věta 7 (Cauchyův vzorec pro konvexní množinu). *Necht' Ω je konvexní otevřená podmnožina $\mathbb{C}$, γ je uzavřená cesta v Ω a $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Je-li $z \in \Omega$ a $z \notin \gamma^*$, pak*

$$f(z) \cdot \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Příklad. Necht' $\gamma(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, pak $\int_\gamma \frac{1}{\xi+1} d\xi = 2\pi i$.

_____ konec přednášky 8.12.2023

Věta 8 (vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou). *Necht' $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pak funkci f lze vyjádřit mocninnou řadou v Ω .*

Důsledek. *Je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pak $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Věta 9 (Moreroova). *Necht' $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, f je spojitá na Ω a $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ pro každý uzavřený trojúhelník $\Delta \subseteq \Omega$. Pak $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

1.7. Vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou - důsledky.

Definice. Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Řekneme, že z_0 je hromadným bodem množiny M , jestliže každé prstencové okolí $D'(z_0, r)$ ($r > 0$) bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M .

Věta 10 (o kořenech holomorfní funkce). *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Označme $Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$. Pak buď*

(i) $Z(f) = \Omega$,

nebo

(ii) $Z(f)$ má hromadný bod v Ω . V tomto případě lze pro každé $a \in Z(f)$ nalézt jednoznačně určené přirozené číslo m takové, že $f(z) = (z - a)^m g(z)$, $z \in \Omega$, kde $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(a) \neq 0$. Množina $Z(f)$ je navíc nejvýše spočetná.

Definice. Je-li a, m, f jako v předchozí větě, pak řekneme, že a je m -násobný kořen funkce f .

Důsledek. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pokud $f(z) = g(z)$ pro všechna z z nějaké množiny M , která má hromadný bod v Ω , pak $f(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \Omega$.*

Poznámka. Předchozí tvrzení neplatí, pokud Ω není souvislá. Je-li například $\Omega = D(0, 1) \cup D(3, 1)$, pak funkce $f(z) = 0$, $z \in \Omega$, a $g(z) = 0$, $z \in D(0, 1)$, a $g(z) = 1$, $z \in D(3, 1)$, jsou holomorfní na Ω , rovnají se na $D(0, 1)$, ale nikoliv na Ω .

Definice. Je-li $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, řekneme, že f má v bodě a izolovanou singularitu. Řekneme, že tato singularita je odstranitelná, pokud funkci f lze dodefinovat v bodě a tak, že výsledná funkce je holomorfní v Ω .

Příklad. $f(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$ má v bodě 1 odstranitelnou singularitu.

Věta 11 (o odstranitelné singularitě). *Nechť $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ a f je omezená na $D'(a, r)$ pro nějaké $r > 0$. Pak f má v bodě a odstranitelnou singularitu.*

Věta 12 (klasifikace izolovaných singularit). *Nechť $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Pak nastává právě jedna z následujících možností.*

(i) f má v bodě a odstranitelnou singularitu.

(ii) $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$. Pak existuje právě jedno $m \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z)$. Navíc existují komplexní čísla $c_1, \dots, c_m$, $c_m \neq 0$, taková, že funkce $f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$ má v bodě a odstranitelnou singularitu.

(iii) Pro každé $r > 0$ takové, že $D(a, r) \subseteq \Omega$, platí, že $f(D'(a, r))$ je hustá v $\mathbb{C}$.

————— konec přednášky 14.12.2023

Definice. Nastává-li případ (ii) z předchozí věty, řekneme, že f má v bodě a pól násobnosti m . Funkci $\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$ nazýváme hlavní částí funkce f v bodě a . Nastává-li případ (iii), řekneme, že f má v bodě a podstatnou singularitu.

Příklady. (a) $f(z) = \frac{1}{z+2}$ má v bodě -2 pól násobnosti 1.

(b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ má v bodě 0 podstatnou singularitu.

Tvrzení. *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Pokud $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$, $z \in D(a, R)$, pak pro $0 < r < R$ platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Definice. Řekneme, že f je celá funkce, pokud $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Věta 13 (Liouvilleova). *Každá omezená celá funkce je konstantní.*

Věta 14 (princip maxima modulu). *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D}(a, r) \subseteq \Omega$. Pak*

$$|f(a)| \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|.$$

Rovnost v předchozí nerovnosti nastává právě tehdy, když f je konstantní na Ω .

Důsledek. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D}(a, r) \subseteq \Omega$, $f \neq 0$ na $D(a, r)$. Pak*

$$|f(a)| \geq \min_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + re^{i\theta})|.$$

Věta 15 (základní věta algebry). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Pak P má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů.*

Věta 16 (Cauchyovy odhady). *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $f \in \mathcal{H}(D(a, R))$. Pokud $|f(z)| \leq M$ pro všechna $z \in D(a, R)$, pak*

$$(1.4) \quad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Příklad. Předchozí odhad je nejlepší možný. Zvolme $f(z) = z^n \in \mathcal{H}(D(0, 1))$, pak $|z|^n \leq 1 = M$ pro $z \in D(0, 1)$. Dále $f^{(n)}(0) = n!$, tedy nastává rovnost v nerovnosti (1.4).

————— konec přednášky 15.12.2023

Definice. Nechť $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ je posloupnost funkcí na Ω . Řekneme, že f_j konverguje k f stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω (konverguje lokálně stejnoměrně), pokud pro každou $K \subseteq \Omega$ kompaktní platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall z \in K \forall j \in \mathbb{N}, j \geq N : |f_j(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Příklad. $\{z^n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně k 0 na kompaktních podmnožinách $D(0, 1)$, ale konvergence není stejnoměrná na $D(0, 1)$.

Věta 17 (zachování holomorfnosti při lokálně stejnoměrné konvergenci). *Nechť $f_j \in \mathcal{H}(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, a předpokládejme, že f_j konverguje k funkci f stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω . Pak $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $f'_j \rightarrow f'$ stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω .*

Důsledek. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Za předpokladů předchozí věty platí, že $f_j^{(n)} \rightarrow f^{(n)}$ stejnoměrně na kompaktních podmnožinách Ω .*

1.8. Věta o otevřeném zobrazení. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast. Pak $f(\Omega)$ nemusí být otevřená množina (příklad: f je konstantní funkce). Ukazuje se ale, že konstantní funkce je v tomto ohledu jediná výjimka.*

Věta 18 (o lokální existenci inverzní funkce). *Nechť $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $\varphi'(z_0) \neq 0$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $D(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ a navíc*

- (i) φ je prostá na $D(z_0, r)$,
- (ii) $W = \varphi(D(z_0, r))$ je otevřená množina,
- (iii) inverzní funkce φ^{-1} je holomorfní na W .

Příklad. Nechť $m \in \mathbb{N}$, $w \neq 0$. Pak funkce $f(z) = z^m$ nabývá hodnoty w v právě m různých bodech. To souvisí s tím, že z^m má v 0 kořen násobnosti m .

Věta 19. *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $f \in \mathcal{H}(D(a, R))$, $b = f(a)$. Předpokládejme, že f není konstantní a funkce $f - b$ má v bodě a kořen násobnosti m . Pak existují $r \in (0, R)$, $\rho > 0$ taková, že pro každé $w \in D'(b, \rho)$ funkce f nabývá hodnoty w v právě m různých bodech z $D(a, r)$.*

Věta 20 (o otevřeném zobrazení). *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a f není konstantní na Ω . Pak f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$ pro každou $G \subseteq \Omega$ otevřenou.*

Věta 21 (o prosté holomorfní funkci). *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ a f je prostá na Ω . Pak $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in \Omega$ a inverzní funkce k f je holomorfní.*

Příklad. Opak Věty 68 neplatí. Je-li $f(z) = e^z$, pak $f'(z) = e^z \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, ale f není prostá na $\mathbb{C}$.

1.9. Globální Cauchyova věta.

Definice. Nechť $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ jsou cesty. Řetězcem rozumíme formální součet $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$. Řetězec Γ se nazývá cykl, pokud jsou cesty $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ uzavřené. Definujeme $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_n^*$. Je-li f spojitá na Γ^* , definujeme integrál funkce f podél Γ jako

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Je-li Γ cykl, $\alpha \notin \Gamma^*$, definujeme index bodu α vzhledem k cyklu Γ jako

$$\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \alpha}.$$

Pozorování. $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma_i}(\alpha)$
 _____ konec přednášky 21.12.2023

Poznámka. Pokud každou cestu γ_i nahradíme opačnou cestou, pak výsledný řetězec je $-\Gamma$. Platí $\int_{-\Gamma} f(z) dz = -\int_{\Gamma} f(z) dz$, $f \in C(\Gamma^*)$.

Věta 22 (globální Cauchyova věta a Cauchyův vzorec). *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Je-li Γ cykl v Ω splňující $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0$ pro $\alpha \notin \Omega$, pak*

$$f(z) \cdot \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

a

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Poznámka. Nechť Ω je konvexní, $\alpha \notin \Omega$, pak $\frac{1}{z - \alpha}$ je holomorfní na Ω a z Cauchyovy věty pro konvexní množinu plyne $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - \alpha} = 0$ pro uzavřenou cestu γ . Tedy $\text{Ind}_{\gamma}(\alpha) = 0$. Věta 69 tedy zobecňuje Věty 53 a 54.

Příklad. Nechť D_1, D_2, D_3 jsou disjunktní uzavřené kruhy v $\mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$. Nechť $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ jsou kladně orientované kružnice v Ω takové, že γ_i obíhá D_i , ale nikoliv D_j , $j \neq i$. Nechť γ_4 je záporně orientovaná kružnice obíhající $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Pak předpoklady Věty 69 jsou splněny.

Důsledek. *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Γ_0, Γ_1 jsou cykly takové, že $\text{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \text{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)$ pro $\alpha \notin \Omega$. Pak $\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz$.*

Věta 23 (Maříkova). *Nechť $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ je uzavřená cesta. Nechť $\alpha < u < v < \beta$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|b| = r > 0$. Nechť dále platí*

- (i) $\gamma(u) = a - b$, $\gamma(v) = a + b$;
- (ii) $|\gamma(s) - a| < r$ právě tehdy, když $u < s < v$;
- (iii) $|\gamma(s) - a| = r$ právě tehdy, když $s = u$ nebo $s = v$.

Předpokládejme, že $D(a, r) \setminus \gamma^$ je sjednocením dvou oblastí D_+ a D_- takových, že $a + bi \in \overline{D_+}$, $a - bi \in \overline{D_-}$. Pak $\text{Ind}_{\gamma}(x) = 1 + \text{Ind}_{\gamma}(w)$, je-li $x \in D_+$, $w \in D_-$.*

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ jsou uzavřené křivky. Řekneme, že γ_0, γ_1 jsou X -homotopické, pokud existuje spojitě zobrazení H čtverce $[0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ do X takové, že

$$H(s, 0) = \gamma_0(s), \quad H(s, 1) = \gamma_1(s), \quad H(0, t) = H(1, t), \quad s \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

Položme $\gamma_t(s) = H(s, t)$. Pak $\gamma_t, t \in [0, 1]$, je soubor křivek v X , který “spojuje” γ_0 a γ_1 .

Řekneme, že γ_0 je 0-homotopická, pokud je X -homotopická konstantnímu zobrazení γ_1 (γ_1 je konstantní, pokud γ_1^* je jednobodová množina). Je-li X souvislý a každá uzavřená křivka v X je 0-homotopická, pak řekneme, že X je jednoduše souvislý.

Intuice. X je jednoduše souvislý, pokud “nemá díru”.

Příklad. Každá konvexní oblast v Ω je jednoduše souvislá. Nechť γ_0 je uzavřená křivka v Ω , $z_1 \in \Omega$. Definujeme $H(s, t) = (1 - t)\gamma_0(s) + tz_1, (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Tedy γ_0 je 0-homotopická.

Věta 24 (zachování indexu při homotopii). *Nechť Ω je oblast, Γ_0, Γ_1 jsou Ω -homotopické uzavřené cesty v Ω . Pak $\text{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \text{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha)$ pro $\alpha \notin \Omega$.*

Příklad. Nechť $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, \frac{1}{2})}$, Γ_0 je kladně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem 1, Γ_1 je záporně orientovaná kružnice se středem 0 a poloměrem 2. Pak Γ_0, Γ_1 nejsou Ω -homotopické.

————— konec přednášky 4.1.2024

Poznámka. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá. Pak každá uzavřená cesta Γ v Ω je 0-homotopická v Ω , a tedy $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0$ pro $\alpha \notin \Omega$. Tedy předpoklad globální Cauchyovy věty je splněn pro každou uzavřenou cestu Γ .

1.10. Rezidua.

Definice. Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená. Řekneme, že f je meromorfní na Ω , pokud existuje množina $A \subseteq \Omega$ splňující

- (i) A nemá hromadný bod v Ω ;
- (ii) $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$;
- (iii) f má pól v každém bodě množiny A .

Poznámka. V předchozí definici je povoleno, aby $A = \emptyset$. Tedy každá $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ je meromorfní na Ω .

Definice. Nechť f, A jsou jako v předchozí definici, $a \in A$. Nechť $Q(z) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}$ značí hlavní část funkce f v bodě a (tj. $f - Q$ má v bodě a odstranitelnou singularitu). Potom číslo c_1 nazýváme reziduem funkce f v bodě a a značíme $c_1 = \text{Res}(f, a)$.

Věta 25 (reziduová věta). *Nechť f je meromorfní funkce na Ω a nechť A značí množinu bodů, ve kterých má funkce f póly. Je-li Γ cykl v $\Omega \setminus A$ splňující*

$$(1.5) \quad \text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0 \quad \text{pro } \alpha \notin \Omega,$$

pak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{\alpha \in A} \text{Res}(f, \alpha) \text{Ind}_{\Gamma}(\alpha).$$

Poznámka. Je-li Ω jednoduše souvislá a Γ je uzavřená cesta v Ω , pak je předpoklad (1.5) reziduové věty splněn.

Věta 26 (některé metody výpočtu reziduí). *Nechť f, g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.*

(i) Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti m , pak

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}.$$

(ii) Jsou-li f, g holomorfní v bodě a , g má v bodě a kořen násobnosti 1 (tj. $g(a) = 0, g'(a) \neq 0$), pak

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(iii) Je-li f holomorfní v a , g má v bodě a pól násobnosti 1, pak

$$\operatorname{Res}(fg, a) = f(a) \operatorname{Res}(g, a).$$

(iv) Je-li f holomorfní v a , g má v bodě a pól násobnosti m , pak

$$\operatorname{Res}(fg, a) = \sum_{k=1}^m \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} c_k,$$

kde $c_1, \dots, c_m$ jsou koeficienty hlavní části funkce g v bodě a .

Příklady. (i) $f(z) = z^2 + z + 1 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}$, pak $\operatorname{Res}(f, 0) = 3$;

(ii) $f(z) = \frac{1+2z+3z^2}{3z+4z^2}$, pak $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{3}$;

(iii) $f(z) = (z+2) \cdot \frac{1+2z+3z^2}{3z+4z^2}$, pak $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{2}{3}$.

Příklad. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Příklad. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$

————— konec přednášky 5.1.2024

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme argument čísla z jako

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i \sin t)\}.$$

Hlavní hodnota argumentu čísla z je jediné reálné číslo $t \in \operatorname{Arg}(z)$, pro které platí $t \in (-\pi, \pi]$.

Tvrzení (Jordanovo lemma). Nechť $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in [\alpha, \beta], |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí

$$(1.6) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \arg z \in [\alpha, \beta]}} f(z) = 0.$$

Pro $r > R$ nechť φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak pro každé $x > 0$ platí

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{ixz} dz = 0.$$

Poznámka. Předpoklad (1.6) znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall z \in \mathbb{C}, |z| > K, \arg z \in [\alpha, \beta] : |f(z)| < \varepsilon.$$

Příklad. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}$

1.11. Laurentovy řady a funkce holomorfní v mezikruží.

Definice. Laurentovou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$(1.7) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Regulární částí řady (1.7) rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Hlavní částí řady (1.7) rozumíme symbol

$$(1.8) \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

Říkáme, že hlavní část řady (1.7) konverguje (v bodě z , absolutně, stejnoměrně na množině M , atd.), pokud příslušnou vlastnost má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$. Součet této řady nazveme součtem hlavní části řady (1.7) a značíme jej rovněž (1.8).

Říkáme, že řada (1.7) konverguje (v bodě z , absolutně, stejnoměrně na množině M , atd.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. Součtem řady (1.7) rozumíme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

Definice. Necht' $0 \leq r < R \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$. Označme $P(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$. Tuto množinu nazveme mezikružím o středu a , vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R .

Poznámka. • $P(a, 0, R) = D'(a, R)$, $R \in (0, \infty)$;

• $P(a, r, \infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a, r)$, $r \in (0, \infty)$;

• $P(a, 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Tvrzení. Mějme Laurentovu řadu (1.7). Pak existují $r, R \in [0, \infty]$, pro která platí

• regulární část řady (1.7) konverguje absolutně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ a diverguje pro $|z-a| > R$;

• hlavní část řady (1.7) konverguje absolutně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z-a| < r$.

Je-li $r < R$, pak řada (1.7) konverguje absolutně na mezikruží $P(a, r, R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží nazýváme mezikružím konvergence řady (1.7).

Věta 27 (rozvoj holomorfní funkce v mezikruží do Laurentovy řady). Necht' f je holomorfní funkce v $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$, $r < R$. Pak f je v $P(a, r, R)$ součtem Laurentovy řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ o středu a , která na $P(a, r, R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_ρ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru ρ .

Věta 28 (charakterizace izolovaných singularit pomocí Laurentovy řady). Necht' f je holomorfní funkce v $D'(a, R) = P(a, 0, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Necht' $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ je Laurentova řada funkce f v $D'(a, R)$. Pak platí

- (i) f má v bodě a odstranitelnou singularitu právě tehdy, když $a_n = 0$ pro každé $n < 0$;
- (ii) f má v bodě a pól násobnosti m právě tehdy, když $a_{-m} \neq 0$, $a_n = 0$ pro všechna $n < -m$;
- (iii) f má v bodě a podstatnou singularitu právě tehdy, když $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.

2. METRICKÉ PROSTORY

Definice. Nechť X je množina a $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ je funkce splňující

- (i) pro $x, y \in X$ je $\rho(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,
- (ii) pro $x, y \in X$ je $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- (iii) pro $x, y, z \in X$ je $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Potom funkci ρ nazýváme metrikou na X a dvojici (X, ρ) nazýváme metrickým prostorem. Jsou-li x, y prvky množiny X , pak $\rho(x, y)$ nazýváme jejich vzdáleností.

Příklady. • $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$

- $X = \mathbb{R}^n$, $\rho_{\text{eukl}}(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{1/2}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ (eukleidovská metrika)
- $X = \mathbb{R}^n$, $\rho_{\text{max}}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ (maximová metrika)
- $X = C([a, b])$ (množina spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$), $\rho_{\text{sup}} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$, $f, g \in X$ (supremová metrika)

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $x \in X$, $r > 0$. Pak množinu $B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ nazýváme otevřenou koulí se středem x a poloměrem r .

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$, $x \in X$. Řekneme, že x je vnitřním bodem množiny A , pokud existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq A$.

Množina A je otevřená, pokud každý bod $x \in A$ je jejím vnitřním bodem.

Vnitřkem množiny A rozumíme množinu všech vnitřních bodů A a značíme jej $\text{Int}A$.

Věta 29 (vlastnosti otevřených množin). Nechť (X, ρ) je metrický prostor, pak

- (i) $\emptyset, X$ jsou otevřené v (X, ρ) ,
- (ii) sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina,
- (iii) průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků z X konverguje k prvku $x \in X$ v prostoru (X, ρ) , pokud platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$. Prvek x nazýváme limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (X, ρ) . Konvergentní posloupností v (X, ρ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (X, ρ) .

Definice. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z metrického prostoru (X, ρ) . Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$, případně vybranou posloupností posloupnosti $\{x_n\}$.

Věta 30 (vlastnosti konvergence). Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z X .

- (i) $\{x_n\}$ má v (X, ρ) nejvýše jednu limitu.
- (ii) Nechť $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Je-li $x \in X$ limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (X, ρ) , pak x je také limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$.

Příklad. $(X, \rho) = (C([0, 1]), \rho_{\text{sup}})$, $f_n(t) = t + 1/n$, $f(t) = t$, pak $f_n \rightarrow f$ v (X, ρ) . (konvergence v ρ_{sup} splývá se stejnoměrnou konvergencí)

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$. Řekneme, že A je uzavřená v (X, ρ) , pokud platí

$$\{x_n\} \subseteq A, x_n \rightarrow x \text{ v } (X, \rho) \text{ pro nějaké } x \in X, \text{ pak } x \in A.$$

Věta 31 (vztah otevřených a uzavřených množin). Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$. Pak A je otevřená právě tehdy, když $X \setminus A$ je uzavřená.

Věta 32 (vlastnosti uzavřených množin). *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, pak*

- (i) $\emptyset, X$ jsou uzavřené v (X, ρ) ,
- (ii) sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina,
- (iii) průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

————— konec přednášky 5.10.2023

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$. Pak uzávěr množiny A v (X, ρ) definujeme jako množinu všech limitních bodů posloupností z A a značíme ho $\overline{A}$.

Věta 33 (vlastnosti uzávěru). *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A, B \subseteq X$. Pak*

- (i) $\overline{\emptyset} = \emptyset, \overline{X} = X$,
- (ii) je-li $A \subseteq B$, pak $\overline{A} \subseteq \overline{B}$; speciálně vždy platí $\overline{A} \subseteq X$,
- (iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- (iv) $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující A .

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subseteq X$ je hustá v (X, ρ) , pokud $\overline{A} = X$.

Příklady. • Množina racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$.

- Množina všech polynomů na $[a, b]$ je hustá v $(C([a, b]), \rho_{\text{sup}})$.

2.1. Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory.

Definice. Nechť $(X, \rho), (Y, \sigma)$ jsou metrické prostory, f je zobrazení X do Y . Řekneme, že f je spojitý, jestliže

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{je-li } y \in X, \rho(x, y) < \delta, \text{ pak } \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Příklad. Je-li $f : (\mathbb{R}^n, \rho_{\text{eukl}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \rho_{\text{eukl}})$ definováno vztahem $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$, pak f je spojitý.

Věta 34 (charakterizace spojitosti). *Nechť $(X, \rho), (Y, \sigma)$ jsou metrické prostory, $f : X \rightarrow Y$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (i) f je spojitý.
- (ii) Pro každou otevřenou množinu G v (Y, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X, ρ) .
- (iii) Pro každou uzavřenou množinu F v (Y, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X, ρ) .
- (iv) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků z X a $x \in X$ splňující $x_n \rightarrow x$ v (X, ρ) platí $f(x_n) \rightarrow f(x)$ v (Y, σ) .

2.2. Kompaktní prostory.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je kompaktní, pokud z každé posloupnosti prvků z X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Řekneme, že množina $K \subseteq X$ je kompaktní v X , jestliže metrický prostor (K, ρ) je kompaktní, tj. jestliže z každé posloupnosti prvků z K lze vybrat podposloupnost, která konverguje v X a jejíž limita je prvkem K .

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pak $[a, b]$ je kompaktní v $\mathbb{R}$.

Věta 35 (vlastnosti kompaktních prostorů). *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $K \subseteq X$.*

- (i) Je-li K kompaktní, pak je K uzavřená.
- (ii) Je-li (X, ρ) kompaktní, K uzavřená, pak K je kompaktní.
- (iii) Je-li (X, ρ) kompaktní, (Y, σ) metrický prostor, $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ spojitý, pak $f(X)$ je kompaktní v (Y, σ) .

Věta 36 (kompaktnost v $\mathbb{R}^n$). *Nechť $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak K je kompaktní v $(\mathbb{R}^n, \rho_{\text{eukl}})$ právě tehdy, když je uzavřená a omezená.*

Poznámka. Množina $A \subseteq (X, \rho)$ je omezená, pokud $\text{diam } A = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} < \infty$.

Příklad. Množina $A = \{f \in C([0, 1]) : |f(x)| \leq 1\}$ je uzavřená a omezená v $(C([0, 1]), \rho_{\text{sup}})$, ale není kompaktní.

————— konec přednášky 6.10.2023

2.3. Úplné prostory.

Definice. Necht (X, ρ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ posloupnost prvků z X . Řekneme, že $\{x_n\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (případně, že $\{x_n\}$ je cauchyovská), pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Věta 37 (konvergentní posloupnost je cauchyovská). *Necht (X, ρ) je metrický prostor, $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost prvků z X . Pak $\{x_n\}$ je cauchyovská.*

Definice. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost prvků z X je konvergentní.

Příklady. • $(\mathbb{R}, \rho_{\text{eukl}})$ je úplný

- $((0, 1), \rho_{\text{eukl}})$ není úplný
- $(\mathbb{R}^n, \rho_{\text{eukl}})$ je úplný

Věta 38 (úplnost a uzavřenost). *Necht (X, ρ) je úplný metrický prostor, $M \subseteq X$. Pak (M, ρ) je úplný právě tehdy, když M je uzavřená v (X, ρ) .*

Příklad. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, pak (M, ρ_{eukl}) je úplný právě tehdy, když M je uzavřená.

2.4. Integrace komplexních funkcí. Reálnou funkcí rozumíme funkci s hodnotami v $\mathbb{R}$. Komplexní funkcí rozumíme funkci s hodnotami v $\mathbb{C}$.

Definice. Necht $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Řekneme, že f je měřitelná, pokud $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subseteq \mathbb{C}$ otevřenou.

Poznámka. Pokud tuto definici měřitelnosti použijeme pro reálné funkce, dostaneme stejný pojem jako ten definovaný v Kalkulu 2.

Věta 39 (měřitelnost komplexních funkcí). *Necht $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor.*

- (i) Jsou-li u, v reálné měřitelné funkce na X a $f = u + iv$, pak f je komplexní měřitelná funkce na X .
- (ii) Je-li $f = u + iv$ komplexní měřitelná funkce na X , pak $u, v, |f|$ jsou reálné měřitelné funkce na X .
- (iii) Jsou-li f, g komplexní měřitelné funkce na X , pak $f + g, fg$ jsou rovněž měřitelné funkce na X .
- (iv) Je-li f komplexní měřitelná funkce na X , pak existuje komplexní měřitelná funkce α taková, že $|\alpha| = 1$, $f = \alpha|f|$.

Příklad. $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ je měřitelná na $\mathbb{R}$.

Definice. Necht $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Soubor všech komplexních měřitelných funkcí f na X splňujících $\int_X |f| d\mu < \infty$ budeme značit $L^1(X, \mu)$.

Poznámka. $L^1(X, \mu) = L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ lze alternativně definovat i pro reálné funkce, viz Kalkulus 2.

Definice. Necht $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$, $f = u + iv$, $f \in L^1(X, \mu)$. Pak definujeme Lebesgueův integrál funkce f přes množinu E jako

$$\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu.$$

Poznámka. Integrál výše je dobře definován, neboť $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$, a tedy $\int_E u d\mu$ a $\int_E v d\mu$ konvergují.

3. L^p PROSTORY

Připomeňme, že reálná funkce φ na intervalu (a, b) se nazývá konvexní, pokud platí

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y), \quad x, y \in (a, b), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Každá konvexní funkce na (a, b) je spojitá na (a, b) .

Věta 40 (Jensenova nerovnost). *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou splňující $\mu(\Omega) = 1$, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Pokud $f \in L^1(\Omega, \mu)$ je reálná funkce splňující $a < f(x) < b$ pro $x \in \Omega$ a φ je konvexní na (a, b) , pak*

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu.$$

Příklad. Z Jensenovy nerovnosti lze odvodit nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}, \quad y_1, \dots, y_n > 0.$$

————— konec přednášky 12.10.2023

Definice. Nechť $p, q > 0$ splňující $p + q = pq$, neboli $1/p + 1/q = 1$. Čísla p, q nazýváme sdružené exponenty. Pak nutně platí $1 < p, q < \infty$. Dále pokud $p \rightarrow 1+$, pak $q \rightarrow \infty$. Dvojici $1, \infty$ budeme též nazývat sdruženými exponenty. Často značíme $p' = q$.

Příklad. $2' = 2$, $1' = \infty$, $\infty' = 1$, $3' = 3/2$

Věta 41 (Hölderova a Minkowského nerovnost). *Nechť p, q jsou sdružené exponenty, $1 < p < \infty$. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ měřitelné. Pak*

(i) (Hölderova nerovnost)

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

(ii) (Minkowského nerovnost)

$$\left(\int_X (f + g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 < p < \infty$, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ měřitelná. Položme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

a označme $L^p(X, \mu)$ množinu takových f , pro které $\|f\|_p < \infty$. Výraz $\|f\|_p$ nazýváme L^p -normou f .

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ podmnožina $\mathbb{R}^n$ s Lebesgueovou mírou, píšeme pouze $L^p(X)$. Je-li μ počítací míra na množině A , píšeme $\ell^p(A)$, nebo jen ℓ^p , je-li $A = \mathbb{N}$. ℓ^p je tedy prostor posloupností a platí $\|\{a_n\}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $g : X \rightarrow [0, \infty]$ měřitelná. Nechť S je množina všech $\alpha \in \mathbb{R}$ takových, že $\mu(g^{-1}((\alpha, \infty])) = 0$. Je-li $S = \emptyset$, položme $\beta = \infty$. Je-li $S \neq \emptyset$, položme $\beta = \inf S$. Číslo β nazýváme esenciálním supremem g a značíme $\text{ess sup } g$.

Je-li $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ měřitelná, položme $\|f\|_{\infty} = \text{ess sup } |f|$ a označme $L^{\infty}(X, \mu)$ množinu takových f , pro které je $\|f\|_{\infty} < \infty$. Funkce z $L^{\infty}(X, \mu)$ nazýváme esenciálně omezené funkce.

Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ podmnožina $\mathbb{R}^n$ s Lebesgueovou mírou, píšeme pouze $L^{\infty}(X)$. Je-li μ počítací míra na množině A , píšeme $\ell^{\infty}(A)$, nebo jen ℓ^{∞} , je-li $A = \mathbb{N}$.

Poznámka. $|f(x)| \leq \lambda$ pro s.v. $x \in X$ právě tehdy, když $\lambda \leq \|f\|_{\infty}$.

Poznámka. Je-li μ počítací míra, pak $\text{ess sup } f = \sup f$, neboť každá neprázdná množina má kladnou míru.

Věta 42 (Hölderova nerovnost pro L^p prostory). *Nechť p, q jsou sdružené exponenty, $1 \leq p \leq \infty$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$. Pak $fg \in L^1(X, \mu)$ a platí $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Věta 43 (trojúhelníková nerovnost pro L^p prostory). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^p(X, \mu)$. Pak $f + g \in L^p(X, \mu)$ a platí $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Poznámka. $L^p(X, \mu)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

————— konec přednášky 13.10.2023

Poznámka. Rozdělme $L^p(X, \mu)$ do tříd ekvivalence tak, že $f \sim g$, pokud $f = g$ μ -s.v. Jsou-li F, G dvě takové třídy ekvivalence, položíme $\rho(F, G) = \|f - g\|_p$, kde $f \in F$ a $g \in G$. Tato definice je korektní (nezávisí na volbě funkcí f, g) a ρ je metrika na množině všech tříd ekvivalence v $L^p(X, \mu)$. V tomto smyslu lze tedy $L^p(X, \mu)$ považovat za metrický prostor.

Poznámka. Je-li $\{f_n\}$ posloupnost v $L^p(X, \mu)$, $f \in L^p(X, \mu)$, řekneme, že

- f_n konverguje k f v $L^p(X, \mu)$, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$;
- f_n je Cauchyovská v $L^p(X, \mu)$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Tyto definice odpovídají dříve zavedeným pojmům pro metrické prostory.

Věta 44 (úplnost L^p prostoru). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p \leq \infty$, pak $L^p(X, \mu)$ je úplný metrický prostor.*

Věta 45 (vztah konvergence v L^p a bodové konvergence s.v.). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p \leq \infty$, $\{f_n\}$ je Cauchyovská posloupnost v $L^p(X, \mu)$ s limitou f . Pak existuje podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ posloupnosti $\{f_n\}$ taková, že $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ pro μ -s.v. $x \in X$.*

Příklad. Je-li $\{f_n\}$ Cauchyovská posloupnost v $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, pak obecně nemusí platit, že f_n konverguje bodově μ -s.v.

Příklad. Nechť $f_n = \chi_{(n, n+1)}$, pak $f_n(x) \rightarrow 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, ale $f_n \not\rightarrow 0$ v $L^p(\mathbb{R})$.

3.1. Jednoduché funkce.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkci $s : X \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme jednoduchou funkcí, pokud obor hodnot s obsahuje pouze konečně mnoho bodů.

Poznámka. Každou jednoduchou funkci lze zapsat ve tvaru $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, kde $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ je obor hodnot s a $A_i = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\}$. Platí, že s je měřitelná právě tehdy, když $A_i \in \mathcal{A}$ pro $i = 1, \dots, n$.

Věta 46 (aproximace jednoduchými funkcemi). *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ měřitelná. Pak existují jednoduché měřitelné funkce s_n takové, že*

- $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$, $x \in X$.

Věta 47 (hustota jednoduchých funkcí v L^p prostoru). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, S je množina všech komplexních měřitelných jednoduchých funkcí s na X splňujících $\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty$. Je-li $1 \leq p < \infty$, pak S je hustá v $L^p(X, \mu)$.*

3.2. Aproximace spojitými funkcemi.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Nosič funkce f definujeme jako

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Soubor všech spojitých komplexních funkcí na X s kompaktním nosičem značíme $C_c(X)$.

Poznámka. • $C_c(X)$ je vektorový prostor.

- Je-li X kompaktní, pak $C_c(X)$ splývá s prostorem spojitých funkcí na X .

————— konec přednášky 19.10.2023

Věta 48 (Luzinova). *Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ je lebesgueovsky měřitelná a splňuje $\lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}) < \infty$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ splňující $\lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ a $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.*

Věta 49 (hustota spojitých funkcí v L^p). *Nechť $1 \leq p < \infty$, pak $C_c(\mathbb{R}^n)$ je hustá v $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Definice. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se anuluje v ∞ , pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní množina $K \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že $|f(x)| < \varepsilon$ pro $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Množinu spojitých funkcí s touto vlastností značíme $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{1+|x|} \in C_0(\mathbb{R}^n) \setminus C_c(\mathbb{R}^n)$.

Věta 50 (uzávěr spojitých funkcí s kompaktním nosičem v supremové metrice). *Nechť $(C(\mathbb{R}^n), \rho_\infty)$ značí prostor omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^n$ se supremovou metrikou*

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|.$$

Pak uzavěr množiny $C_c(\mathbb{R}^n)$ v prostoru $(C(\mathbb{R}^n), \rho_\infty)$ je $C_0(\mathbb{R}^n)$.

4. HILBERTOVY PROSTORY

Definice. Nechť H je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Řekneme, že H je prostor se skalárním součinem, pokud každé dvojici $x, y \in H$ lze přiřadit komplexní číslo $\langle x, y \rangle$ (nazývané skalární součin x a y) tak, že platí

- (i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- (ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $x, y, z \in H$,
- (iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- (iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $x \in H$,
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Poznámky. • Podmínky (ii) a (iii) říkají, že pro každé $y \in H$ je zobrazení $x \mapsto \langle \alpha x, y \rangle$ lineární.

- $\langle 0, y \rangle = 0$ pro všechna $y \in H$,
- $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$, $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- $\langle z, x + y \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle$, $x, y, z \in H$.

Definujme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in H$. Číslo $\|x\|$ nazýváme normou vektoru $x \in H$.

Schwarzova nerovnost: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, $x, y \in H$

Trojúhelníková nerovnost: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in H$

Důsledek. *Uvažujme funkci $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in H$. Pak ρ je metrika na H , tj. (H, ρ) je metrický prostor.*

Definice. Nechť H je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že H je Hilbertův prostor, je-li metrický prostor (H, ρ) úplný.

Příklady. Příklady Hilbertových prostorů:

- $\mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = x\bar{y}$,
- $\mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$, kde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$,
- $L^2(X, \mu)$, kde μ je prostor s mírou; $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$. Odpovídající norma je $\|f\| = \|f\|_2$.

Příklad. Množina komplexních spojitých funkcí na $[0, 1]$ s $\langle f, g \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} dt$ je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

Věta 51 (spojitost skalárního součinu a normy). *Nechť H je Hilbertův prostor, $y \in H$. Pak zobrazení*

$$x \mapsto \langle x, y \rangle, \quad x \mapsto \langle y, x \rangle, \quad x \mapsto \|x\|$$

jsou spojitá na H .

4.1. Podprostory. Připomeneme: Podmnožina M vektorového prostoru V je podprostorem V , pokud platí

$$x, y \in M \Rightarrow x + y \in M; \quad x \in M, \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha x \in M.$$

Příklady. $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$, pak $V_1 = \{f \in V : f \text{ je omezená}\}$ je podprostor V , ale $V_2 = \{f \in V : |f(x)| \leq 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R}\}$ není podprostor V .

————— konec přednášky 20.10.2023

Definice. Je-li H Hilbertův prostor a M je podprostor H , pak M je uzavřený podprostor H , je-li M uzavřená podmnožina H .

Pozorování. Je-li M podprostor H , pak $\overline{M}$ je též podprostor H .

4.2. Konvexní množiny.

Definice. Nechť V je vektorový prostor, $E \subseteq V$. Řekneme, že E je konvexní, pokud platí:

$$x \in E, y \in E, 0 < t < 1 \Rightarrow z_t := (1 - t)x + ty \in E.$$

4.3. Ortogonalita (kolmost).

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor, $x, y \in H$. Řekneme, že x, y jsou ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Píšeme $x \perp y$.

Nechť $x \in H$, M je podprostor H . Značíme

$$x^\perp = \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0\},$$

$$M^\perp = \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pro každé } x \in M\}.$$

Poznámka. Relace $x \perp y$ je symetrická, tj. $\langle x, y \rangle = 0$ právě tehdy, když $\langle y, x \rangle = 0$.

Pozorování. Nechť $x \in H$, M je podprostor H . Pak $x^\perp$, $M^\perp$ jsou uzavřené podprostory H .

Příklad. Nechť $H = L^2((0, 1))$ a $g(t) = 1$ pro $t \in (0, 1)$. Pak $g^\perp = \{f \in L^2((0, 1)) : \int_0^1 f(t) dt = 0\}$.

Věta 52 (o prvku s nejmenší normou). *Nechť H je Hilbertův prostor, $E \subseteq H$ neprázdná, uzavřená a konvexní. Pak existuje právě jeden prvek $x \in E$ takový, že $\|x\| = \min_{y \in E} \|y\|$.*

Tvrzení (rovnoběžníkové pravidlo). *Nechť H je Hilbertův prostor, $x, y \in H$. Pak*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Věta 53 (o ortogonální projekci). *Nechť H je Hilbertův prostor a M jeho uzavřený podprostor.*

- Pro každé $x \in H$ existuje jednoznačný rozklad $x = Px + Qx$, kde $Px \in M$ a $Qx \in M^\perp$.*
- Px, Qx jsou takové body $z \in M$, resp. $M^\perp$, které mají od x nejmenší vzdálenost.*
- Zobrazení $P : H \rightarrow M$, $Q : H \rightarrow M^\perp$ jsou lineární.*
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.*

Zobrazení P, Q se nazývají ortogonální projekce prostoru H na M , resp. $M^\perp$.

Připomeneme: $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je pro každé $y \in H$ spojitý lineární funkcionál na H .

Věta 54 (spojité lineární funkcionály na Hilbertově prostoru). *Nechť H je Hilbertův prostor a L je spojitý lineární funkcionál na H . Pak existuje právě jedno $y \in H$ takové, že $Lx = \langle x, y \rangle$, $x \in H$.*

————— konec přednášky 26.10.2023

4.4. Ortonormální množiny.

Definice. Řekneme, že množina vektorů $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je ortonormální, pokud platí $\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = 0$ kdykoliv $\alpha \neq \beta$, $\alpha \in A$, $\beta \in A$, a zároveň $\|u_\alpha\| = 1$ pro všechna $\alpha \in A$.

Příklad. $H = \mathbb{C}^n$, pak $u_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $u_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $u_n = (0, \dots, 0, 1)$ je ortonormální množina.

Definice. Nechť $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H . Každému $x \in H$ přiřadíme komplexní funkci $\hat{x}$ na množině A definovanou vztahem $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle$, $\alpha \in A$. Čísla nazýváme Fourierovými koeficienty x vzhledem k množině $\{u_\alpha\}$.

Příklad. Nechť $H = \mathbb{C}^n$, $\{u_i : i = 1, \dots, n\}$ jsou jako výše. Je-li $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, pak $\hat{x}(i) = \langle x, u_i \rangle = x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Věta 55 (o konečných ortonormálních množinách). *Nechť $\{u_\alpha : \alpha \in F\}$ je konečná ortonormální množina v Hilbertově prostoru H . Nechť M_F je lineární obal množiny $\{u_\alpha : \alpha \in F\}$.*

(i) *Je-li φ komplexní funkce na F , pak existuje $y \in M_F$ splňující $\hat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha)$, $\alpha \in F$. Prvek y je tvaru $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) u_\alpha$ a splňuje $\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2$.*

(ii) *Je-li $x \in H$ a $s_F(x) = \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) u_\alpha$, pak $\|x - s_F(x)\| < \|x - s\|$ pro $s \in M_F$, $s \neq s_F(x)$, a platí $\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$. Tj. $s_F(x)$ je nejlepší aproximace x v prostoru M_F .*

Příklad. Uvažujme $H = \mathbb{C}^4$ s ortonormální množinou $\{u_i : i = 1, 2\}$, tj. $F = \{1, 2\}$. Pak $M_F = \{(x_1, x_2, 0, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$. Je-li $x \in \mathbb{C}^4$, pak $s_F(x) = x_1 u_1 + x_2 u_2 = (x_1, x_2, 0, 0)$.

Definice. Nechť A je množina a φ je funkce na A . Pak $\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$ definujeme jako Lebesgueův integrál funkce φ vzhledem k počítací míře na A . Speciálně, je-li $0 \leq \varphi(\alpha) \leq \infty$, pak $\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$ je rovna supremu všech konečných sum $\varphi(\alpha_1) + \dots + \varphi(\alpha_n)$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou po dvou různé prvky z A .

Definice. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \rightarrow Y$. Řekneme, že f je izometrie, pokud $\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$, $x, y \in X$.

Věta 56 (o ortonormální množině). *Nechť $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H a nechť P je lineární obal množiny $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$.*

(i) *(Besselova nerovnost) $\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$, $x \in H$.*

(ii) *(Rieszova-Fischerova věta) $x \mapsto \hat{x}$ je spojitý lineární zobrazení prostoru H na $\ell^2(A)$.*

(iii) *Restrikce zobrazení z části (ii) na množinu $\overline{P}$ je izometrie $\overline{P}$ na $\ell^2(A)$.*

Věta 57 (o maximální ortonormální množině). *Nechť $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *$\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ je maximální ortonormální množina v H (tj. každá ortonormální množina obsahující $\{u_\alpha\}$ je rovna $\{u_\alpha\}$).*

(ii) *Lineární obal množiny $\{u_\alpha\}$ je hustý v H .*

(iii) *$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$, $x \in H$.*

(iv) *(Parsevalova rovnost) $\sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)} = \langle x, y \rangle$, $x \in H$, $y \in H$.*

Maximální ortonormální množina se často nazývá ortonormální báze prostoru H .

Definice. Řekneme, že Hilbertovy prostory H_1, H_2 jsou izomorfní, pokud existuje lineární bijekce $\Lambda : H_1 \rightarrow H_2$ taková, že $\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1}$, $x, y \in H_1$. Zobrazení Λ se nazývá izomorfismus.

Poznámka. Z Vět 28 a 29 plyne, že je-li $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ maximální ortonormální množina v Hilbertově prostoru H , pak zobrazení $x \mapsto \hat{x}$ je izomorfismus H na $\ell^2(A)$.

Věta 58 (existence maximální ortonormální množiny). *Nechť B je ortonormální množina v Hilbertově prostoru H . Potom existuje maximální ortonormální množina A v H taková, že $B \subseteq A$.*

Důsledek. *Každý netriviální Hilbertův prostor je izomorfní prostoru $\ell^2(A)$ pro nějakou množinu A .*

Definice. Dvojici $(\mathcal{P}, \leq)$ nazveme částečně uspořádanou množinou, pokud platí

- (i) $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$,
- (ii) $a \leq a$ pro každé $a \in \mathcal{P}$,
- (iii) $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$.

Podmnožina $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ je totálně uspořádaná, pokud pro všechna $a, b \in \mathcal{L}$ platí buď $a \leq b$ nebo $b \leq a$.

————— konec přednášky 27.10.2023

Příklad. Nechť $\mathcal{P}$ je soubor všech otevřených množin v $\mathbb{R}^2$ a $G_1 \leq G_2$, pokud $G_1 \subseteq G_2$. Nechť $\mathcal{L}$ je soubor všech otevřených kruhů se středem v počátku. Pak $\mathcal{L}$ je maximální totálně uspořádaná množina v $\mathcal{P}$.

Tvrzení (Hausdorffova věta o maximalitě). *Každá neprázdná částečně uspořádaná množina obsahuje maximální totálně uspořádanou podmnožinu.*

4.5. Trigonometrické řady. Nechť $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je-li F funkce na T , definujeme funkci f na $\mathbb{R}$ vztahem

$$(4.1) \quad f(t) = F(e^{it}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pak f je 2π -periodická, tj. $f(t + 2\pi) = f(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Podobně, je-li f 2π -periodická funkce na $\mathbb{R}$, definujeme funkci F na T vztahem (4.1). Tedy 2π -periodické funkce na T lze ztotožnit s funkcemi na T .

L^p prostory na T značíme $L^p(T)$ a ztotožníme je s L^p prostory na $(-\pi, \pi)$ vzhledem k normalizované Lebesgueově míře $\frac{1}{2\pi} dx$, tj.

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

a

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|.$$

Dále definujeme $C(T)$ jako soubor všech spojitých komplexních funkcí na T (nebo ekvivalentně všech spojitých komplexních 2π -periodických funkcí na $\mathbb{R}$), s normou

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|.$$

Trigonometrický polynom je funkce tvaru

$$(4.2) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}$. S použitím vzorců $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ a $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ lze (4.2) přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

kde $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Položme $u_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Pak $\{u_n\}$ je maximální ortonormální množina v $L^2(T)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

4.6. Fourierovy řady.

Definice. Nechť $f \in L^1(T)$. Pak definujeme Fourierův koeficient f vztahem

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

a Fourierovu řadu f vztahem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Částečné součty této řady jsou

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Rieszova-Fischerova věta. Je-li $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ posloupnost komplexních čísel splňující $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, pak existuje $f \in L^2(T)$ taková, že $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, $n \in \mathbb{Z}$.

Parsevalova věta. $f \in L^2(T)$, $g \in L^2(T)$, pak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Speciálně

$$(4.3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Poznámka. Aplikací (4.3) na funkci $f - s_N$ dostaneme $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - s_N\|_2 = 0$, tj. částečné součty Fourierovy řady funkce f konvergují k f v L^2 normě.

Důsledek. Zobrazení $f \mapsto \hat{f}$ je izomorfismus mezi Hilbertovými prostory $L^2(T)$ a $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Poznámka. Je-li $f \in L^1(T)$ reálná funkce, jsou koeficienty $\hat{f}(n)$ obecně komplexní čísla. Je ale možné uvažovat reálnou Fourierovu řadu tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Pak $a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$, $a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$, $b_n = (c_{-n} - c_n)/i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$, $n \in \mathbb{N}$. Částečné součty jsou potom rovny

$$s_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

a Parsevalova rovnost má tvar

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

_____ konec přednášky 3.11.2023

Poznámka. Je-li $f \in L^1(T)$ sudá, pak

$$b_n = 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \text{ pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Je-li $f \in L^1(T)$ lichá, pak

$$a_n = 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Příklad. Reálná Fourierova řada 2π -periodické funkce f splňující $f(t) = \operatorname{sgn} t$, $t \in [-\pi, \pi)$, je $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$. Z Parsevalovy rovnosti plyne $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Příklad. Reálná Fourierova řada 2π -periodické funkce f splňující $f(t) = t^2$, $t \in [-\pi, \pi)$, je $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$. Pokud bychom věděli, že tato řada konverguje k funkci f v bodě π , dosazením $t = \pi$ bychom dostali $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. BANACHOVY PROSTORY

Definice. Necht' X je vektorový prostor na $\mathbb{C}$. Řekneme, že X je normovaný lineární prostor, pokud každému prvku $x \in X$ je přiřazeno nezáporné reálné číslo $\|x\|$, nazývané norma x , splňující

- (i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$;
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- (iii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Poznámka. Je-li X normovaný lineární prostor, pak zobrazení $\rho(x, y) = \|x - y\|$ je metrika na X .

Definice. Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Příklady. • $X = \mathbb{C}$, $\|x\| = |x|$ je Banachův prostor.

- Každý Hilbertův prostor s normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ je Banachův.
- Je-li (X, μ) prostor s mírou a $1 \leq p \leq \infty$, pak $L^p(X, \mu)$ je Banachův prostor.
- $X = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_n \neq 0 \text{ jen pro konečně mnoho indexů } n\}$, $\|\{a_n\}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. Pak X je normovaný lineární prostor, který není Banachův.

Poznámka. Lze rovněž uvažovat reálné Banachovy prostory. Definice je analogická, pouze u podmínky (ii) předpokládáme, že $\alpha \in \mathbb{R}$.

Příklad. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ je reálný Banachův prostor, kde $\|x\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|x_1|, |x_2|\}, & p = \infty. \end{cases}$

Definice. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory, $\Lambda : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Normu zobrazení Λ definujeme vztahem

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Je-li $\|\Lambda\| < \infty$, řekneme, že Λ je omezené lineární zobrazení. Pokud navíc $Y = \mathbb{C}$, nazýváme Λ omezený lineární funkcional.

Poznámka. Místo suprema přes jednotkovou kouli stačí uvažovat supremum přes jednotkovou sféru, tj. přes ta $x \in X$, pro která $\|x\| = 1$. Dále platí, že $\|\Lambda\|$ je nejmenší číslo takové, že $\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\| \|x\|$ pro všechna $x \in X$.

————— konec přednášky 9.11.2023

Příklad. $\varphi : \ell^1 \rightarrow \mathbb{C}$ je definováno vztahem $\varphi(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = x_1$. Pak $\|\varphi\| = 1$ a zobrazení své normy nabývá.

Věta 59 (charakterizace lineárních zobrazení). *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\Lambda : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) Λ je omezené;
- (ii) Λ je spojité;
- (iii) Λ je spojité v 0.

Poznámka. Dále někdy budeme psát “spojité lineární zobrazení” místo “omezené lineární zobrazení”.

5.1. Baireova věta a její důsledky.

Věta 60 (Baireova). *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor, pak průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin v X je hustá množina v X .*

Poznámka. Speciálně je tedy výše uvedený průnik neprázdný (s výjimkou případu $X = \emptyset$).

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subseteq X$. Řekneme, že A je typu G_δ v X , pokud A je průnikem spočetně mnoha otevřených množin.

Příklad. Nechť $X = \mathbb{R}$, pak $\{0\}$ není otevřená, ale je G_δ .

Věta 61 (Banachova-Steinhausova, princip stejnoměrné omezenosti). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor, $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je soubor omezených lineárních zobrazení X do Y . Pak buď*

- (i) *existuje $M < \infty$ takové, že $\|\Lambda_\alpha\| \leq M$ pro všechna $\alpha \in A$,*
nebo
- (ii) $\sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha x\| = \infty$ *pro všechna x z nějaké husté G_δ množiny v X .*

Věta 62 (věta o otevřeném zobrazení). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a Λ je omezené lineární zobrazení X na Y . Pak $\Lambda(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu G v X .*

Věta 63 (spojitost inverzního zobrazení). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a Λ je omezené lineární zobrazení X na Y , které je navíc prosté. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\|\Lambda x\| \geq \delta \|x\|$, $x \in X$. Tedy Λ^{-1} je omezené lineární zobrazení Y na X .*

————— konec přednášky 10.11.2023

Příklad. Existuje $f \in C(T)$ taková, že její Fourierova řada diverguje v 0. Označme $s_n(f, 0)$ částečné součty Fourierovy řady funkce f v 0 a položme $\Lambda_n f = s_n(f, 0)$. Pak $\|\Lambda_n\| \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$ a požadovaný závěr plyne z principu stejnoměrné omezenosti.

5.2. Hahnova-Banachova věta.

Věta 64 (Hahnova-Banachova). *Je-li M podprostor normovaného lineárního prostoru X a f je omezený lineární funkcionál na M , pak f lze rozšířit na omezený lineární funkcionál F na X splňující $\|F\| = \|f\|$.*

Názvosloví. Funkcionál F je rozšířením funkcionálu f , pokud definiční obor F obsahuje definiční obor f a $F(x) = f(x)$ pro x z definičního oboru f . Dále

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in M, \|x\| \leq 1\}, \quad \|F\| = \sup\{|F(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Poznámka. Je-li X Hilbertův prostor, pak výše uvedené rozšíření existuje jediné a je rovno 0 na $M^\perp$. Pro obecný normovaný lineární prostor ale takových rozšíření může existovat více.

Věta 65 (oddělování bodu a podprostoru). *Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X a nechť $x_0 \in X \setminus M$. Pak existuje omezený lineární funkcionál f na X takový, že $f(x) = 0$ pro $x \in M$ a $f(x_0) \neq 0$.*

Příklad. Nechť $X = \mathbb{C}^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x + y = 0\}$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Pak funkcionál z (důkazu) předchozí věty má tvar $f(x, y) = x + y$.

Věta 66. *Je-li X normovaný lineární prostor a $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, pak existuje omezený lineární funkcionál f na X s normou 1 takový, že $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak soubor všech omezených lineárních funkcionálů na X značíme X^* a nazýváme duálním prostorem k prostoru X .

Poznámka. • X^* je Banachův prostor.

• Pokud $X \neq \{0\}$, pak $X^* \neq \{0\}$. Dokonce platí, že X^* odděluje body X , tj. jsou-li $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, pak existuje $f \in X^*$ splňující $f(x_1) \neq f(x_2)$.

• Je-li $x \in X$, pak

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

Pro dané $x \in X$ je tedy zobrazení $f \mapsto f(x)$ omezený lineární funkcionál na X^* s normou $\|x\|$.

_____ konec přednášky 16.11.2023

5.3. Omezené lineární funkcionály na L^p . Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 \leq p \leq \infty$, q je sdružený exponent k p . Je-li $g \in L^q(X, \mu)$, pak z Hölderovy nerovnosti plyne, že zobrazení

$$\Phi_g(f) = \int_X fg \, d\mu$$

je omezený lineární funkcionál na $L^p(X, \mu)$ s normou nejvýše $\|g\|_q$. Existují i jiné omezené lineární funkcionály na $L^p(X, \mu)$?

Věta 67 (omezené lineární funkcionály na L^p). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor se σ -konečnou mírou, $1 \leq p < \infty$, Φ je omezený lineární funkcionál na $L^p(X, \mu)$. Pak existuje právě jedna $g \in L^q(X, \mu)$, kde q je sdružený exponent k p , taková, že*

$$(5.1) \quad \Phi(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad f \in L^p(X, \mu).$$

Pro tato Φ a g platí $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

Poznámky. • Předchozí věta říká, že $g \mapsto \Phi$ je lineární izometrie mezi $L^q(X, \mu)$ a $(L^p(X, \mu))^*$, $1 \leq p < \infty$.

• Předchozí věta neplatí pro $p = \infty$. Např. existuje omezený lineární funkcionál na $L^\infty([0, 1])$, který není tvaru (5.1) pro $g \in L^1([0, 1])$.

5.4. Omezené lineární funkcionály na $C(K)$.

Definice. Nechť K je kompaktní metrický prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, pokud $\Lambda f \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Věta 68 (o reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$). *Nechť K je kompaktní metrický prostor a nechť Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje právě jedna regulární borelovská míra μ na K splňující*

$$\Lambda(f) = \int_K f \, d\mu, \quad f \in C(K).$$

Názvosloví. • Míra μ je borelovská, pokud je definována na σ -algebře borelovských podmnožin K .

• Borelovská míra μ je regulární, pokud pro každou borelovskou množinu $B \subseteq K$ platí

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq B \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F) : F \subseteq B \text{ uzavřená}\}.$$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkci $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme komplexní mírou, pokud platí

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Nechť μ je komplexní míra na $(X, \mathcal{A})$. Položme

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)|, \quad E \in \mathcal{A},$$

kde supremum bereme přes všechny rozklady $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, kde $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní. Lze ukázat, že $|\mu|$ je nezáporná míra a $|\mu|(X) < \infty$. $|\mu|$ se nazývá totální variace μ .

Je-li μ komplexní borelovská míra, pak existuje komplexní borelovsky měřitelná funkce h splňující $|h| = 1$ a $d\mu = h d|\mu|$, tj. $\mu(E) = \int_E h d|\mu|$, $E \in \mathcal{A}$. Pro pěknou funkci f (například omezenou a borelovsky měřitelnou) pak definujeme integrál

$$\int_X f d\mu = \int_X f h d|\mu|.$$

Řekneme, že komplexní borelovská míra na X je regulární, pokud její totální variace $|\mu|$ je regulární.

Věta 69 (Rieszova věta o reprezentaci duálu k $C(K)$). *Nechť K je kompaktní metrický prostor a nechť Φ je omezený lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje právě jedna regulární komplexní borelovská míra μ splňující*

$$\Phi(f) = \int_K f d\mu, \quad f \in C(K).$$

Navíc $\|\Phi\| = |\mu|(K)$.

6. FOURIEROVA TRANSFORMACE

Definice. Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}$ vydělenou konstantou $\sqrt{2\pi}$ budeme značit m . V této kapitole budeme prostor $L^p(\mathbb{R})$ značit L^p a uvažovat na něm normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dm(x) \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Prostor všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, které se anulují v ∞ , budeme značit C_0 .

Definice. Nechť $f \in L^1$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme vztahem

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} dm(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

————— konec přednášky 23.11.2023

Poznámka. Jelikož $|f(x)e^{-ixt}| = |f(x)|$, integrál výše konverguje pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Věta 70 (základní vlastnosti Fourierovy transformace). *Nechť $f \in L^1$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) *Je-li $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t - \alpha)$.*

(ii) *Je-li $g(x) = f(x - \alpha)$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)e^{-i\alpha t}$.*

(iii) *Je-li $g(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)$.*

(ii) *Je-li $g(x) = f(x/\lambda)$ a $\lambda > 0$, pak $\widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$.*

Poznámka. Jsou-li $f, g \in L^1$, pak $\widehat{f+g}(t) = \widehat{f}(t) + \widehat{g}(t)$. Není ale pravda, že $\widehat{f}(t)\widehat{g}(t) = \widehat{fg}(t)$. Pro tyto účely je třeba nahradit součin funkcí jejich konvolucí.

Věta 71 (o konvoluci). *Nechť $f \in L^1, g \in L^1$. Pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dm(y) < \infty \quad \text{pro s.v. } x \in \mathbb{R}.$$

Pro tato x položme

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dm(y).$$

Pak $h \in L^1$ a platí $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Definice. Jsou-li $f, g \in L^1$, pak funkci h z Věty 71 nazýváme konvolucí funkcí f, g a značíme $h = f * g$.

Věta 72 (Fourierova transformace konvoluce a derivace). *Nechť $f \in L^1$.*

- (i) *Je-li $g \in L^1$ a $h = f * g$, pak $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t)$.*
- (ii) *Pokud funkce $g(x) = -ixf(x)$ patří do L^1 , pak $\widehat{g}(t) = (\widehat{f})'(t)$.*
- (iii) *Pokud $f' \in L^1$, pak $\widehat{f}'(t) = it\widehat{f}(t)$.*

Věta 73 (spojitost Fourierovy transformace). *Je-li $f \in L^1$, pak $\widehat{f} \in C_0$ a platí $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.*

Tvrzení. *Nechť $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$. Pak $\widehat{f} = f$.*

————— konec přednášky 24.11.2023

Věta 74 (věta o inverzi). *Pokud $f \in L^1, \widehat{f} \in L^1$ a $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt} dm(t), x \in \mathbb{R}$, pak $g \in C_0$ a $f(x) = g(x)$ s.v.*

Důsledek (věta o jednoznačnosti). *Je-li $f \in L^1$ a $\widehat{f}(t) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, pak $f(x) = 0$ s.v.*

6.1. Fourierova transformace na L^2 .

Tvrzení. *Nechť $f \in L^1 \cap L^2$. Pak $\widehat{f}$ patří do L^2 a platí $\|\widehat{f}\| = \|f\|_2$.*

Pozorování. Je-li $f \in L^2$, pak $f\chi_{(-N,N)} \in L^1$ pro $N > 0$, a tedy $\widehat{f\chi_{(-N,N)}}$ je definována. Dále platí, že posloupnost funkcí $\{\widehat{f\chi_{(-N,N)}}\}_{N=1}^{\infty}$ je cauchyovská, a tedy konvergentní v L^2 .

Definice. *Nechť $f \in L^2$. Pak Fourierovu transformaci funkce f definujeme vztahem $\widehat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f\chi_{(-N,N)}}$, přičemž konvergenci rozumíme v L^2 smyslu.*

Poznámka. Je-li $f \in L^1$, pak $\widehat{f}$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Je-li $f \in L^2$, pak $\widehat{f}$ je definována jako prvek prostoru L^2 , a tedy bodově pouze skoro všude. Je-li $f \in L^1 \cap L^2$, pak její L^1 -Fourierova transformace splývá s L^2 -Fourierovou transformací skoro všude.

Věta 75 (Plancherel a Parseval). *Nechť $f, g \in L^2$. Pak*

- (i) $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ (Plancherelova rovnost);
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t)} dm(t)$ (Parsevalova rovnost).

Příklad. Pomocí Fourierovy transformace jsme řešili diferenciální rovnici $-u'' + u = f$, kde $f \in L^1$ a $u \in L^1$. Pak $\widehat{u}(t) = (t^2 + 1)^{-1}\widehat{f}(t)$, a tedy $u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy$.

Poznámka. Rovnice $-u'' + u = f$ má nekonečně mnoho řešení, ale řešení nalezené výše je jediné, které patří do L^1 .