

KALKULUS 3, ZIMNÍ SEMESTR 2025/26 INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

ZÁPOČET

Zápočet lze získat za splnění alespoň jedné z následujících podmínek:

- (1) Úspěšné vyřešení domácích úkolů. Úkoly budou celkem 4 a jejich rozpis lze najít v harmonogramu. Za každý úkol lze získat 12 bodů, tedy celkem 48. K zápočtu je třeba získat 32 bodů (tedy dvě třetiny).
- (2) V případě nedostatku bodů je třeba napsat zápočtovou písemku. Bude se psát na cvičeních v posledním týdnu, tedy 5. 1. a 8. 1. K úspěšnému napsání je třeba získat opět 2/3 bodů.
- (3) V případě neúspěchu je třeba získat více bodů ze zkoušky.

V případě zisku alespoň 39 bodů se body přepočítají na bonusové body ke zkoušce. Konkrétně: Počet bodů nad 38 se vydělí dvěma a připočte k početní části zkoušky:

$$body_{zk} = \max \left\{ \frac{body_{du} - 38}{2}, 0 \right\}$$

ZKOUŠKA

Ke zkoušce se lze přihlásit i bez získaného zápočtu.

V zimním zkouškovém období jsou vypsány čtyři termíny zkoušky, podrobnější informace o čase a místě konání těchto zkoušek lze nalézt v SISu. V případě zájmu bude jeden termín vypsán v letním zkouškovém.

Zkouška bude písemná a bude se skládat ze dvou částí: početní a teoretické. Na početní část bude 120 minut a je možné používat libovolné tištěné nebo rukou psané materiály. Zakázána je veškerá technika (kalkulačky, mobily, počítače, chytré hodinky...).

Následovat bude 10 min přestávka.

Na teoretickou část zkoušky bude 90 minut a nejsou povoleny žádné materiály ani technika.

Početní část zkoušky bude obsahovat 4 příklady z látky probírané v průběhu semestru. Konkrétně půjde o příklady z následujících partií:

- (1) Fourierovy řady (10 bodů)
- (2) Fourierova transformace (10 bodů)
- (3) Komplexní analýza (10 bodů)
- (4) Integrál pomocí reziduové věty (10 bodů)

V teoretické části zkoušky bude třeba zformulovat 6 definic/vět po 5 bodech.

Celkem je tedy možné získat 40 bodů (+5 bonusových) z početní části a 30 z teoretické části zkoušky.

Celkové hodnocení zkoušky

K úspěšnému složení zkoušky je třeba získat alespoň 20 bodů z početní a 15 z teoretické části zkoušky.

K početní části zkoušky se dále připočítávají bonusové body z domácích úkolů.

Celkovému hodnocení odpovídají zhruba tyto body

- 35 - 46 dobře
- 47 - 58 velmi dobře
- 59 - 70 výborně

Vzor početní části zkoušky

- (1) Spočtěte reálnou Fourierovu řadu 2π -periodické funkce f splňující

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ x^2, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

- (2) (i) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = x\chi_{(-3,3)}(x).$$

Výsledek zapište ve tvaru, z něhož bude patrné, že $\hat{f}$ nabývá pouze imaginárních hodnot.

(ii) S pomocí výsledku části (i) spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$g(x) = x \cos x \chi_{(-3,3)}(x).$$

- (3) Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz,$$

kde γ je dána rovnicí $|z| = 2$

- (4) S pomocí reziduové věty spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5 - 3 \cos x} dx.$$

Vzor teoretické části zkoušky

Otázka 1. (5 bodů) Napište definici Fourierovy transformace funkce $f \in L^2$.

Otázka 2. (5 bodů) Zformulujte větu o vztahu konvergence v L^p a bodové konvergence.

Otázka 3. (5 bodů) Zformulujte větu o maximální ortonormální množině v Hilbertově prostoru.

Otázka 4. (5 bodů) Zformulujte Hahnovu-Banachovu větu.

Otázka 5. (5 bodů) Zformulujte větu o Cauchyových-Riemannových podmínkách.

Otázka 6. (5 bodů) Napište definici oblasti.

Seznam definic a vět, jejichž znalost bude požadována při teoretické části zkoušky

Definice:

sdružené exponenty
 prostory $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$
 esenciální supremum, esenciálně omezená funkce
 jednoduchá funkce
 nosič funkce
 prostory $C_c(\mathbb{R}^n)$ a $C_0(\mathbb{R}^n)$
 prostor se skalárním součinem
 Hilbertův prostor
 konvexní množina
 kolmost vektorů, $x^\perp$, $M^\perp$
 ortonormální množina
 Fourierovy koeficienty v Hilbertově prostoru
 izometrie
 ortonormální báze
 izomorfismus Hilbertových prostorů
 částečně uspořádaná množina
 Fourierův koeficient a Fourierova řada funkce $f \in L^1(T)$
 normovaný lineární prostor
 Banachův prostor
 norma lineárního zobrazení, omezené lineární zobrazení a funkcionál
 množina typu G_δ
 komplexní míra, totální variace míry
 Fourierova transformace funkce z L^1
 Fourierova transformace funkce z L^2
 konvoluce
 souvislá množina
 oblast
 derivace komplexní funkce komplexní proměnné
 holomorfní funkce
 celá funkce
 mocninná řada v $\mathbb{C}$
 cesta, uzavřená cesta
 opačná cesta, délka cesty
 integrál funkce podél cesty
 index bodu vzhledem ke křivce
 hromadný bod množiny
 m -násobný kořen funkce
 izolovaná singularita

odstranitelná singularita, pól násobnosti m , podstatná singularita
 řetězec, cykl
 integrál funkce podél řetězce, index bodu vzhledem k cyklu
 homotopie křivek, jednoduše souvislý metrický prostor
 meromorfní funkce, reziduum
 Laurentova řada, její regulární a hlavní část, konvergence a součet

Věty:

- Jensenova nerovnost (Věta 12)
- Hölderova a Minkowského nerovnost (Věta 13)
- Hölderova nerovnost pro L^p prostory (Věta 14)
- trojúhelníková nerovnost pro L^p prostory (Věta 15)
- úplnost L^p prostoru (Věta 16)
- vztah konvergence v L^p a bodové konvergence s.v. (Věta 17)
- aproximace jednoduchými funkcemi (Věta 18)
- hustota jednoduchých funkcí v L^p prostoru (Věta 19)
- Luzinova věta (Věta 20)
- hustota spojitých funkcí v L^p prostoru (Věta 21)
- uzávěr spojitých funkcí s kompaktním nosičem v supremové metrice (Věta 22)
- spojitost skalárního součinu a normy (Věta 23)
- o prvku s nejmenší normou (Věta 24)
- o ortogonální projekci (Věta 25)
- spojité lineární funkcionály na Hilbertově prostoru (Věta 26)
- o konečných ortonormálních množinách (Věta 27)
- o ortonormální množině (Věta 28)
- o maximální ortonormální množině (Věta 29)
- existence maximální ortonormální množiny (Věta 30)
- charakterizace lineárních zobrazení (Věta 31)
- Baireova věta (Věta 32)
- Banachova-Steinhausova věta / princip stejnoměrné omezenosti (Věta 33)
- věta o otevřeném zobrazení (Věta 34)
- spojitost inverzního zobrazení (Věta 35)
- Hahnova-Banachova věta (Věta 36)
- oddělování bodu a podprostoru (Věta 37)
- omezené lineární funkcionály na L^p (Věta 39)
- o reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$ (Věta 40)
- Rieszova věta o reprezentaci duálu k $C(K)$ (Věta 41)
- základní vlastnosti Fourierovy transformace (Věta 42)
- o konvoluci (Věta 43)
- Fourierova transformace konvoluce a derivace (Věta 44)
- spojitost Fourierovy transformace (Věta 45)
- věta o inverzi (Věta 46)
- Plancherelova a Parsevalova rovnost (Věta 47)

Cauchyovy-Riemannovy podmínky (Věta 48)
 derivace mocninné řady (Věta 49)
 o indexu bodu vzhledem ke křivce (Věta 50)
 integrál derivace podél uzavřené cesty (Věta 51)
 Cauchyova věta pro trojúhelník (Věta 52)
 Cauchyova věta pro konvexní množinu (Věta 53)
 Cauchyův vzorec pro konvexní množinu (Věta 54)
 vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou (Věta 55)
 Morerova věta (Věta 56)
 o kořenech holomorfní funkce (Věta 57)
 o odstranitelné singularitě (Věta 58)
 klasifikace izolovaných singularit (Věta 59)
 Liouvilleova věta (Věta 60)
 princip maxima modulu (Věta 61)
 základní věta algebry (Věta 62)
 Cauchyovy odhady (Věta 63)
 zachování holomorfnosti při lokálně stejnoměrné konvergenci (Věta
 64)
 o lokální existenci inverzní funkce (Věta 65)
 věta o otevřeném zobrazení pro holomorfní funkce (Věta 67)
 o prosté holomorfní funkci (Věta 68)
 globální Cauchyova věta a Cauchyův vzorec (Věta 69)
 Maříkova věta (Věta 70)
 zachování indexu při homotopii (Věta 71)
 reziduová věta (Věta 72)
 některé metody výpočtu reziduí (Věta 73)
 rozvoj holomorfní funkce v mezikruží do Laurentovy řady (Věta 74)
 charakterizace izolovaných singularit pomocí Laurentovy řady (Věta
 75)