



12. cvičení – Hilbertovy prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Rozhodněte, zda následující normy na daných prostorech jsou vytvořeny skalárním součinem:

- (a) Prostor $C[a, b]$ s normou definovanou vztahem

$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Řešení: Ne, norma nesplňuje rovnoběžníkové pravidlo.

Protipříklad: Zvolme $f = x$, $g = 1 - x$.

Platí

$$2\|f\|_\infty^2 = 2 \cdot 1^2 \quad \text{a} \quad 2\|g\|_\infty^2 = 2 \cdot 1^2,$$

zatímco

$$\|f + g\|_\infty^2 = 1^2 \quad \text{a} \quad \|f - g\|_\infty^2 = 1^2.$$

Tedy

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 \neq 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2.$$

- (b) Norma $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ na prostoru ℓ^1

Řešení: Ne, norma nesplňuje rovnoběžníkové pravidlo.

Uvažujme v ℓ^1 posloupnosti

$$x = (1, 0, 0, \dots), \quad y = (0, 1, 0, \dots).$$

Potom

$$\|x\| = 1, \quad \|y\| = 1,$$

$$\|x + y\| = \|(1, 1, 0, \dots)\| = 2,$$

$$\|x - y\| = \|(1, -1, 0, \dots)\| = 2.$$

Dosazením do rovnoběžníkového pravidla dostaneme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4 + 4 = 8,$$

zatímco

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2 + 2 = 4.$$

Rovnost tedy neplatí.

Závěr: Norma

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

na prostoru ℓ^1 není indukována žádným skalárním součinem.

- (c) Norma $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ na $\mathbb{R}^n$

Řešení:

- Pro $n \geq 2$: Ne, norma nesplňuje rovnoběžníkové pravidlo.
Uvažujme pro $n \geq 2$ vektory

$$x = (1, 0, \dots, 0), \quad y = (0, 1, 0, \dots, 0).$$

Potom

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= 1, & \|y\|_\infty &= 1, \\ \|x + y\|_\infty &= \|(1, 1, 0, \dots, 0)\|_\infty = 1, \\ \|x - y\|_\infty &= \|(1, -1, 0, \dots, 0)\|_\infty = 1. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnoběžníkového pravidla dostáváme

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2,$$

zatímco

$$2\|x\|_\infty^2 + 2\|y\|_\infty^2 = 2 + 2 = 4.$$

Rovnost tedy neplatí.

Závěr: Norma

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 2$ není indukována žádným skalárním součinem.

- Pro $n = 1$ se jedná o absolutní hodnotu na $\mathbb{R}$, která je indukována obvyklým skalárním součinem:
Norma se redukuje na

$$\|x\|_\infty = |x|.$$

Rovnoběžníkové pravidlo má tvar

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Pro reálná čísla x, y platí

$$|x + y|^2 = (x + y)^2, \quad |x - y|^2 = (x - y)^2,$$

a tedy

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Tedy rovnoběžníkové pravidlo platí.

Lze ukázat i přímo: Uvažujme obvyklý skalární součin na $\mathbb{R}$ definovaný předpisem

$$\langle x, y \rangle = xy.$$

Norma indukovaná tímto skalárním součinem je dána vztahem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

2. V následujících příkladech je dán Hilbertův prostor H , jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y a určete nejbližší bod v Y k bodu x_0 .

- (a) $H = L^2([-1, 1])$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 1, $x_0(t) = \cos t$;

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že podprostor

$$Y = \text{span}\{1, t\}$$

je dvourozměrný. Nejprve nalezneme ortonormální bázi prostoru Y .

Spočtěme normu konstantní funkce:

$$\|1\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 1 \, dt = 2,$$

tedy

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|_{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dále ortogonalizujeme funkci t :

$$\tilde{e}_2 = t - \langle t, e_1 \rangle e_1.$$

Platí

$$\langle t, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 1 \cdot t \, dt = 0,$$

a tedy $\tilde{e}_2 = t$. Jeho norma je

$$\|\tilde{e}_2\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 t^2 \, dt = \frac{2}{3},$$

po znormalizování dostáváme

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} t.$$

Pak $\{e_1, e_2\}$ je ortonormální báze prostoru Y .

Konečně, nejbližším bodem v Y k funkci $x_0(t) = \cos t$ je její ortogonální projekce

$$P_Y(\cos t) = \langle \cos t, e_1 \rangle e_1 + \langle \cos t, e_2 \rangle e_2.$$

Protože $\cos t$ je sudá funkce, platí

$$\langle \cos t, e_2 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t \cos t \, dt = 0.$$

Dále

$$\langle \cos t, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \cos t \, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \sin 1 = \sqrt{2} \sin 1.$$

Dostáváme tedy

$$P_Y(\cos t) = \sqrt{2} \sin 1 \, e_1 = \sin 1,$$

což je hledaný nejbližší bod v Y k funkci x_0 .

- (b) $H = \ell^2$, Y je lineární obal množiny $\{(2^{-n})_{n=1}^{\infty}, (3^{-n})_{n=1}^{\infty}\}$, $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$;

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že podprostor

$$Y = \text{span}\{a, b\}, \quad a = (2^{-n})_{n=1}^{\infty}, \quad b = (3^{-n})_{n=1}^{\infty},$$

je dvourozměrný. Nejprve nalezneme ortonormální bázi prostoru Y .

Spočteme nejprve normu vektoru a :

$$\|a\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n})^2 \|a\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{3},$$

a tedy

$$e_1 = \frac{a}{\|a\|} = \sqrt{3} (2^{-n})_{n=1}^{\infty}.$$

Dále orthogonalizujeme vektor b :

$$\tilde{e}_2 = b - \langle b, e_1 \rangle e_1.$$

Platí

$$\langle b, e_1 \rangle = \sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} 6^{-n} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

tedy

$$\tilde{e}_2 = (3^{-n})_{n=1}^{\infty} - \frac{\sqrt{3}}{5} \sqrt{3} (2^{-n})_{n=1}^{\infty}$$

Jeho norma je

$$\|\tilde{e}_2\|^2 = \|b\|^2 - \langle b, e_1 \rangle^2 = \frac{1}{8} - \frac{3}{25} = \frac{1}{200},$$

a po znormování dostáváme

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \sqrt{200} \left(3^{-n} - \frac{3}{5} 2^{-n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

Pak $\{e_1, e_2\}$ je ortonormální báze prostoru Y .

Konečně, nejbližším bodem v Y k vektoru $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$ je jeho ortogonální projekce

$$P_Y x_0 = \langle x_0, e_1 \rangle e_1 + \langle x_0, e_2 \rangle e_2.$$

Spočteme jednotlivé koeficienty:

$$\langle x_0, e_1 \rangle = \sqrt{3} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \langle x_0, e_2 \rangle = \sqrt{200} \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{200} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10} \right) = \frac{\sqrt{200}}{30}.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme

$$P_Y x_0 = \left(-\frac{5}{2} 2^{-n} + \frac{20}{3} 3^{-n} \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Tento vektor je hledaným nejbližším bodem v Y k vektoru x_0 .

(c) $H = L^2([0, 1], t dt)$, Y je lineární obal množiny $\{1, t^2\}$, $x_0(t) = t$;

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že podprostor

$$Y = \text{span}\{1, t^2\}$$

je dvourozměrný. Skalární součin v H je dán předpisem

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) t dt.$$

Nejprve nalezneme ortonormální bázi prostoru Y .

Spočtěme normu konstantní funkce:

$$\|1\|^2 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

tedy

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|} = \sqrt{2}.$$

Dále ortogonalizujeme funkci t^2 :

$$\tilde{e}_2 = t^2 - \langle t^2, e_1 \rangle e_1.$$

Platí

$$\langle t^2, e_1 \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 t^3 dt = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

tedy

$$\tilde{e}_2 = t^2 - \frac{1}{2}.$$

Jeho norma je

$$\|\tilde{e}_2\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 t dt = \int_0^1 \left(t^5 - t^3 + \frac{1}{4}t\right) dt = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24},$$

a po znormalizování dostáváme

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \sqrt{24} \left(t^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Pak $\{e_1, e_2\}$ je ortonormální báze prostoru Y .

Konečně, nejbližším bodem v Y k funkci $x_0(t) = t$ je její ortogonální projekce

$$P_Y(t) = \langle t, e_1 \rangle e_1 + \langle t, e_2 \rangle e_2.$$

Spočteme jednotlivé koeficienty:

$$\langle t, e_1 \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\langle t, e_2 \rangle = \sqrt{24} \int_0^1 \left(t^3 - \frac{1}{2}t\right) t dt = \frac{\sqrt{24}}{30}$$

Dostáváme tedy

$$P_Y(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2} + \sqrt{24} \left(t^2 - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{24}}{30} = \frac{4}{5}t^2 + \frac{4}{15}$$

což je hledaný nejbližší bod v Y k funkci x_0 .

(d) $H = L^2((0, \infty), e^{-t} dt)$, Y je lineární obal množiny $\{1, e^{-2t}\}$, $x_0(t) = e^{-3t}$.

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že podprostor

$$Y = \text{span}\{1, e^{-2t}\}$$

je dvourozměrný. Skalární součin v H je dán předpisem

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

Nejprve nalezneme ortonormální bázi prostoru Y .

Spočtěme normu konstantní funkce:

$$\|1\|^2 = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-t} dt = 1,$$

tedy

$$e_1 = 1.$$

Dále ortogonalizujeme funkci e^{-2t} :

$$\tilde{e}_2 = e^{-2t} - \langle e^{-2t}, e_1 \rangle e_1.$$

Platí

$$\langle e^{-2t}, e_1 \rangle = \int_0^\infty e^{-2t} \cdot 1 \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-3t} dt = \frac{1}{3},$$

tedy

$$\tilde{e}_2 = e^{-2t} - \frac{1}{3}.$$

Jeho norma je

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}_2\|^2 &= \int_0^\infty \left(e^{-2t} - \frac{1}{3}\right)^2 e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-4t} e^{-t} dt - \frac{2}{3} \int_0^\infty e^{-2t} e^{-t} dt + \frac{1}{9} \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{45}. \end{aligned}$$

Po znormalizování dostáváme

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \sqrt{\frac{45}{4}} \left(e^{-2t} - \frac{1}{3}\right).$$

Množina $\{e_1, e_2\}$ je ortonormální bázi prostoru Y .

Nyní určíme ortogonální projekci funkce $x_0(t) = e^{-3t}$ na Y . Platí

$$P_Y x_0 = \langle x_0, e_1 \rangle e_1 + \langle x_0, e_2 \rangle e_2.$$

Nejprve

$$\langle x_0, e_1 \rangle = \int_0^\infty e^{-3t} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-4t} dt = \frac{1}{4}.$$

Dále

$$\langle x_0, e_2 \rangle = \sqrt{\frac{45}{4}} \int_0^\infty \left(e^{-3t} \left(e^{-2t} - \frac{1}{3} \right) \right) e^{-t} dt = \sqrt{\frac{45}{4}} \left(\int_0^\infty e^{-6t} dt - \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-4t} dt \right).$$

Odtud

$$\langle x_0, e_2 \rangle = \sqrt{\frac{45}{4}} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \sqrt{\frac{45}{4}} \cdot \frac{1}{12}.$$

Ortogonální projekce má tedy tvar

$$P_Y(e^{-3t}) = \frac{1}{4} + \frac{45}{48} \left(e^{-2t} - \frac{1}{3} \right)$$

Tato funkce je nejbližším bodem v Y k funkci $x_0(t) = e^{-3t}$.

(e) $H = L^2([-1, 1])$, Y je podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = \sin t$;

Řešení: Řešení opsáno od www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf

Nejdříve si uvědomíme, že Y je třídimenzionální prostor s bází $\{1, x, x^2\}$. Pomocí ortogonalizačního procesu nyní nalezneme ortonormální bázi prostoru Y . Položme

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|_{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a

$$\tilde{e}_2 = x - \langle x, e_1 \rangle e_1 = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t \cdot 1 dt = x,$$

pak

$$\|\tilde{e}_2\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

a tedy po znormalizování dostáváme

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} x.$$

Analogicky spočteme, že

$$\begin{aligned} \tilde{e}_3(x) &= x^2 - \langle \text{Id}^2, e_2 \rangle e_2 - \langle \text{Id}^2, e_1 \rangle e_1 \\ &= x^2 - \left(\frac{3}{2} \int_{-1}^1 t^3 dt \right) x - \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt \right) 1 = x^2 - 0 - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

tedy

$$\|\tilde{e}_3\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt = 2 \int_0^1 \left(t^4 - \frac{2}{3} t^2 + \frac{1}{9} \right) dt = 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{45}.$$

Po znormalizování tak dostáváme

$$e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1).$$

Pak $\{e_1, e_2, e_3\}$ je ortonormální bázi prostoru Y .

Zvolme $f \in L^2([-1, 1])$. Pro ortogonální projekci P_Y platí vzorec

$$\begin{aligned} P_Y f &= \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2 + \langle f, e_3 \rangle e_3 \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt + \frac{3}{2} x \int_{-1}^1 t f(t) dt + \frac{5}{8} (3x^2 - 1) \int_{-1}^1 (3t^2 - 1) f(t) dt \\ &= \left(\frac{45}{8} x^2 - \frac{15}{8} \right) \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt + \frac{3}{2} x \int_{-1}^1 t f(t) dt + \left(-\frac{15}{8} x^2 + \frac{9}{8} \right) \int_{-1}^1 f(t) dt, \end{aligned}$$

Konečně, nejbližším bodem v Y k funkci $x_0(t) = \sin t$ je funkce

$$\begin{aligned} P_Y(\sin t) &= \left(\frac{45}{8} x^2 - \frac{15}{8} \right) \int_{-1}^1 t^2 \sin t dt + \frac{3}{2} x \int_{-1}^1 t \sin t dt + \left(-\frac{15}{8} x^2 + \frac{9}{8} \right) \int_{-1}^1 \sin t dt \\ &= 0 + 3x \int_0^1 t \sin t dt + 0 \quad (\text{per partes}) \\ &= 3x \left([-t \cos t]_0^1 + \int_0^1 \cos t dt \right) \\ &= 3x(\sin 1 - \cos 1). \end{aligned}$$

3. Nechť je v Hilbertově prostoru $L^2(-1, 1)$ dána funkce $f(x) = x$. Popište $f^\perp$ a nalezněte nějakou nenulovou funkci g , která patří do $f^\perp$.

Řešení:

Podprostor ortogonální k f je definován jako

$$f^\perp = \{g \in L^2([-1, 1]) : \langle g, f \rangle = 0\} = \left\{ g \in L^2([-1, 1]) : \int_{-1}^1 g(x) x dx = 0 \right\}.$$

Jako příklad ne nulové funkce v $f^\perp$ můžeme zvolit libovolnou sudou funkci, například

$$g(x) = 1 \quad \text{nebo} \quad g(x) = x^2.$$

4. Nechť je v Hilbertově prostoru $L^2(-1, 1)$ dán podprostor $Y = \{f \in L^2(-1, 1) : f \text{ je lichá funkce}\}$. Nalezněte $Y^\perp$.

Řešení:

Podprostor ortogonální k Y je

$$Y^\perp = \{g \in L^2([-1, 1]) : \int_{-1}^1 g(x) f(x) dx = 0 \text{ pro všechna lichá } f\}.$$

Integrál $\int_{-1}^1 g(x) f(x) dx$ bude nulový pro všechna lichá f právě tehdy, když g je sudá funkce, protože pro sudou g integrand $g(x) f(x)$ je lichý a jeho integrál přes symetrický interval $[-1, 1]$ je nulový.

Tedy

$$Y^\perp = \{g \in L^2([-1, 1]) : g(-x) = g(x)\},$$

tedy podprostor všech sudých funkcí v $L^2([-1, 1])$.

5. Ukažte, že

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)] dt$$

je skalární součin na $C^1[a, b]$, tj. na množině funkcí majících spojitou derivaci.

Řešení:

- Symetrie: $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ plyne z komutativity součinu.
- Linearita: $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$ a $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$ plyne z linearity integrálu a derivace.
- Nezápornost: $\langle f, f \rangle = \int_a^b (f^2 + (f')^2) dt \geq 0$.
- $\langle f, f \rangle = 0$ právě tehdy, když $f = f' = 0$ skoro všude. Ze spojitosti f pak plyne, že $f \equiv 0$ na $[a, b]$.

6. Ukažte, že posloupnost

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots \right\}$$

tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2[-\pi, \pi]$ se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg dx$.
Odvoďte Fourierovy koeficienty funkce $f \in L^2[-\pi, \pi]$ v této bázi.

Řešení: Označme

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \right\} \subset L^2[-\pi, \pi], \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

- Ortonormalita.

Použijeme goniometrické identity

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x),$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x),$$

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x).$$

Nechť $n, m \geq 1$. Pak

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) dx.$$

Je-li $n \neq m$, pak

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

tedy integrál je roven 0. Pro $n = m$ dostaneme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \frac{1}{2\pi} (2\pi) = 1.$$

Analogicky

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx,$$

odkud opět pro $n \neq m$ vyjde 0 a pro $n = m$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = 1.$$

Dále

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) \, dx = 0,$$

protože integrál $\sin kx$ na $[-\pi, \pi]$ je nulový (funkce je lichá).

Nakonec konstantní člen:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin nx \, dx = 0,$$

a

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \, dx = 1.$$

Tím je ortonormalita báze $\mathcal{B}$ dokázána.

- Fourierovy koeficienty. Pro $f \in L^2[-\pi, \pi]$ jsou koeficienty vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ dány skalárními součiny

$$a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx,$$

$$a_n = \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \geq 1.$$

7. Necht' ℓ_0^2 je prostor všech komplexních posloupností, které mají konečně mnoho nenulových prvků. Na tomto prostoru uvažujeme skalární součin $\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$. Dokažte, že ℓ_0^2 s tímto skalárním součinem není Hilbertův prostor.

Řešení: Axiomy skalárního součinu ověříme stejně jako v následujícím příkladě.

Dále ukážeme, že ℓ_0^2 není Hilbertův prostor. Uvažujeme posloupnost

$$x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \in \ell_0^2.$$

Pro $m < n$ platí

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{pro } m, n \rightarrow \infty,$$

tedy $\{x^{(n)}\}$ je cauchyovská posloupnost v ℓ_0^2 . Limitní posloupnost je

$$x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in \ell^2,$$

kteřá má nekonečně mnoho nenulových prvků, takže $x \notin \ell_0^2$.

Proto ℓ_0^2 není úplný a tedy není Hilbertovým prostorem.

8. Dokažte, že operace $\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$ definuje skalární součin na prostoru ℓ^2 .

Bonus: dokažte, že ℓ^2 je Hilbertův prostor.

Řešení:

- Skalární součin na ℓ^2 . Necht' $\{a_k\}, \{b_k\} \in \ell^2$, tj. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ a $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$. Definujeme

$$\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

Ověříme axiomy skalárního součinu:

(a) Linearita: Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $\{a_k\}, \{c_k\} \in \ell^2$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \{a_k\} + \beta \{c_k\}, \{b_k\} \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta c_k) \overline{b_k} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{b_k} \\ &= \alpha \langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle + \beta \langle \{c_k\}, \{b_k\} \rangle. \end{aligned}$$

(b) Symetrie:

$$\langle \{a_k\}, \{b_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \overline{a_k}} = \overline{\langle \{b_k\}, \{a_k\} \rangle}.$$

(c) Pozitivní definitnost:

$$\langle \{a_k\}, \{a_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \geq 0,$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $a_k = 0$ pro všechna k , tedy $\{a_k\} = 0$.

Tedy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na ℓ^2 .

- ℓ^2 je Hilbertův prostor.

Necht' $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je cauchyovská posloupnost v ℓ^2 , kde

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots), \quad \|x_n - x_m\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x_m^k|^2.$$

Fixujme $\varepsilon > 0$. Existuje $N = N(\varepsilon)$ takové, že pro všechna $n, m \geq N$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x_m^k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Z toho plyne, že pro každé pevné k máme

$$|x_n^k - x_m^k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Tedy pro každé k je posloupnost $(x_n^k)_n$ cauchyovská v $\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$) a proto konvergentní. Označme limitu

$$x^k := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k.$$

Ukážeme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^2 \leq \varepsilon^2/4.$$

Pro libovolné $M \in \mathbb{N}$ a $n \geq N$ platí

$$\sum_{k=1}^M |x_n^k - x^k|^2 = \sum_{k=1}^M \lim_{m \rightarrow \infty} |x_n^k - x_m^k|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M |x_n^k - x_m^k|^2,$$

kde druhá rovnost vyplývá z vlastností limit na konečné sumě.

Ale pro $m \geq N$ máme

$$\sum_{k=1}^M |x_n^k - x_m^k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x_m^k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Po přechodu k limitě $m \rightarrow \infty$ dostáváme

$$\sum_{k=1}^M |x_n^k - x^k|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \forall M \in \mathbb{N}.$$

Nakonec, při $M \rightarrow \infty$ (monotónní konvergence) dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2,$$

tedy

$$\|x_n - x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tím jsme ukázali, že (x_n) konverguje v ℓ^2 , a tedy prostor ℓ^2 je úplný.